Repasa lo que sabes (página 143)

1. Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = x^2 - x$ en los intervalos [3, 5] y [5, 7].

$$\text{TVM}[3, 5] = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{20 - 6}{2} = 7 \qquad \text{TVM}[5, 7] = \frac{f(7) - f(5)}{7 - 5} = \frac{42 - 20}{2} = 11$$

2. Halla la tasa de variación media de la función anterior para cualquier intervalo de amplitud h.

$$\text{TVM}[x, x + h] = \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{(x + h)^2 - (x + h) - x^2 + x}{h} = \frac{2xh + h^2 - h}{h} = 2x - 1 + h$$

3. A partir de la función $f(x) = 1 - 2x$, calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

$$\lim_{x \to a} \frac{1 - 2x - 1 + 2a}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{-2(x - a)}{x - a} = -2$$

4. Calcula $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(0 + h) - f(0)}{h}$ si $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(h^2 + 1) - \ln 0}{h} = \lim_{h \to 0} \ln(h^2 + 1)^{\frac{1}{h}} = (1^{\infty}) = \lim_{h \to 0} \ln e^{\frac{(h^2 + 1 - 1)}{h}} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2}{h} = 0$$

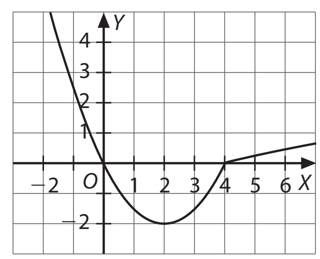
5. Representa la función: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} - 2x & \text{si } x \leq 4 \\ \sqrt{x} - 2 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

¿Qué característica presenta $f(x)$ en $x = 4$?

Ambas funciones son continuas en su dominio respectivo. Cuando $x < 4$ se trata de una parábola abierta hacia arriba con vértice en $(2, -2)$. A partir de cuatro la función es la raíz cuadrada desplazada dos unidades hacia abajo. En conjunto es una función continua, pues:

- $f(2) = 0$
- $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{x^2}{2} - 2x = 8 - 8 = 0$
- $\lim\limits_{x \to 4^+} \sqrt{x} - 2 = 2 - 2 = 0$

Sin embargo en $x = 4$ la función no es «suave», tiene un pico, pues no es derivable en ese punto. La derivada no es continua en ese punto.



Sugerencias didácticas. Recursos TIC

Recta tangente paralela (página 154)

En el vídeo se muestra la resolución del segundo ejercicio resuelto de la página. Primero se halla el valor de la pendiente de la recta dada y después se determina el punto en el que la recta tangente a la función es paralela.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital un ejercicio de este tipo, indicando los pasos que se realizan, o para que los alumnos puedan repasar este procedimiento más tarde.

Recta tangente y punto de inflexión (página 159)

En el vídeo se puede ver la resolución del ejercicio resuelto 2. Se halla el punto en el que se anula la segunda derivada, es decir, el punto de inflexión, para calcular a continuación la ecuación de la recta tangente.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital un ejemplo completo de este tipo de ejercicios o para que los alumnos puedan repasar el procedimiento utilizado más tarde.

Derivabilidad (página 160)

En el vídeo puede verse la resolución, paso a paso, del ejercicio resuelto 4 de esta página. Se estudia la continuidad y la derivabilidad de la función a trozos, calculando el valor de a para que sea derivable en el punto que se indica.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital un ejercicio de este tipo o para que los alumnos puedan repasar el procedimiento a realizar en estos casos más tarde.

Actividades (páginas 145/158)

1 **Dada la función $f(x) = (1 - x)^2$, calcula su derivada en el punto de abscisa 1. ¿Qué puedes decir acerca de la recta tangente a la gráfica de f en dicho punto?**

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2}{h} = 0$$

La recta tangente es horizontal.

2 **Averigua el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva de la función $f(x) = x^2 - 1$ en el punto de abscisa $x = 2$.**

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 1 - 3}{h} = 4$$

El valor de la pendiente de la recta tangente a la curva $x^2 - 1$ en el punto $x = 2$ es 4.

3 **Calcula la pendiente de la tangente a $f(x) = \sqrt{x}$ en el punto de abscisa $x = 4$. A continuación, escribe la ecuación de dicha recta.**

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} = \frac{1}{4}$$

$f(4) = 2$

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4) \Rightarrow y = \frac{x}{4} + 1$$

4 **Averigua en qué punto de la gráfica de $f(x) = x^2 - 2x$, la pendiente de la recta tangente es 4.**

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - 2(x+h) - (x^2 - 2x)}{h} = 4$$

$\Rightarrow 2x - 2 = 4 \Rightarrow x = 3$

5 **Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x+2}$ en el punto de abscisa $x = 2$.**

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} = \frac{1}{4}$$

$f(2) = 2$

Recta tangente: $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{x}{4} + \frac{3}{2}$

Recta normal: $y - 2 = -4(x - 2) \Rightarrow y = -4x + 10$

6 **Determina, si existe, la derivada de la siguiente función en el punto de abscisa $x = 1$:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 1 \\ 2 - x & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

En $x = 1$ la función es continua.

$$f'_-(1) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 - h - 1}{h} = -1$$

$$f'_+(1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h} = -1$$

$f'(1) = -1$

7 **Calcula si, en el punto de abscisa 2, existe la derivada de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

No es continua en $x = 2$, por tanto no existe la derivada de f en ese punto.

8 **Calcula si la función $f(x) = |x^2 - 1|$ es derivable en $x = -1$ y $x = 1$.**

No es derivable en dichos puntos, puesto que las derivadas laterales en ellos son distintas:

$f'_-(-1) = 2$; $f'_+(-1) = -2$

$f'_-(1) = -2$; $f'_+(1) = 2$

9 **Determina si la función $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ es derivable en $x = -1$.**

No es derivable en $x = -1$, ya que no es continua en $x = -1$.

10 **Determina si es derivable en $x = 2$ la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq 2 \\ \ln(x - 1) & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

La función f es continua en $x = 2$, pero no es derivable, puesto que $f'_-(2) = 4$ y $f'_+(2) = 1$.

11 **Calcula el valor del parámetro a para que sea derivable en $x = 1/2$ la función:**

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + x & \text{si } x < \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{a}{x} & \text{si } x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Si $a = -\frac{2}{9}$, f es continua en $x = \frac{1}{2}$, pero no es derivable en $x = \frac{1}{2}$. Por lo tanto el punto $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ es un punto anguloso.

12 **Dada la función $f(x) = 3x^2 - x$, calcula $f'(1)$, $f''(-2)$ y $f'''(2)$.**

$f'(1) = 6 \cdot 1 - 1 = 5$, $f''(-2) = 6$, $f'''(2) = 0$

13 **Halla las derivadas sucesivas de la función $f(x) = x^3 - 2$.**

$f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$, $f^{4)}(x) = 0$, $f^{5)}(x) = 0\ldots$

$f^{n)}(x) = 0$

14 **Calcula la segunda derivada de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} (x-5)^2 + 7 & \text{si } x \geq 5 \\ -(x-5)^2 + 7 & \text{si } x < 5 \end{cases}$$

Primero calculamos la primera derivada:

$$f''(x) = \begin{cases} 2(x-5) & \text{si } x > 5 \\ -2(x-5) & \text{si } x < 5 \end{cases}$$

Y ahora podemos calcular la segunda:

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x > 5 \\ -2 & \text{si } x < 5 \end{cases}$$

15 **Determina la función derivada de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

La función derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

16 **Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = x^3 - \dfrac{2x}{3} - \dfrac{1}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{5x^5}$

c) $f(x) = \sqrt{x^3} - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$

d) $f(x) = 3 - x\sqrt{x} + \dfrac{3x^2}{\sqrt{x^3}}$

a) $f'(x) = 3x^2 - \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{x^2}$

b) $f'(x) = \dfrac{-4}{x^3} - \dfrac{3}{x^6}$

c) $f'(x) = \dfrac{3\sqrt{x}}{2} + \dfrac{4}{3x\sqrt[3]{x^2}}$

d) $f'(x) = \dfrac{-3\sqrt{x}}{2} + \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$

17 **Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = (x^2 - 2x) \cdot \left(\sqrt{3x} - \dfrac{1}{x}\right)$

b) $f(x) = \left(2x - \dfrac{1}{x^2}\right) \cdot (x-1)^2$

a) $f'(x) = \dfrac{5x\sqrt{3x}}{2} - 3\sqrt{3x} - 1$

b) $f'(x) = 6x^2 - 8x + 2 - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}$

18 **Determina:**

a) **Para qué valores de x la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x$ es paralela a la recta $y = 3$.**

b) **Los puntos de la gráfica de $f(x)$ cuya tangente es perpendicular a la recta de ecuación $x - 15y + 3 = 0$.**

a) $3x^2 - 12x - 15 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 5$

b) $3x^2 - 12x - 15 = -15 \Rightarrow x = 0$, $x = 4 \Rightarrow (0, 0)$ y $(4, -92)$

19 **Dada la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, determina los coeficientes a, b y c sabiendo que la gráfica de $f(x)$ pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(3, 0)$, y que la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 1$ tiene pendiente igual a -1.**

A partir de los datos del enunciado se puede plantear el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 0 = a + b + c \\ 0 = 9a + 3b + c \\ -1 = 2a + b \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2};\ b = -2;\ c = \frac{3}{2}$$

20 **Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = ax^2 + b$, calcula a y b para que las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ sean tangentes en el punto de abscisa $x = 2$.**

$f'(x) = 2x - 2$

$g'(x) = 2ax$

$f'(2) = g'(2) \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$

Dado que $f(2) = 3$, $g(2) = 3 = \dfrac{1}{2} \cdot 4 + b \Rightarrow b = 1$

21 **Calcula para qué valores de a las tangentes a la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + 2x + 3$ en los puntos de abscisa $x = 1$ y $x = -1$ son perpendiculares entre sí.**

$f'(x) = 2ax + 2$

$f'(1) = 2a + 2$

$f'(-1) = -2a + 2$

Puesto que deben ser perpendiculares:

$$(2a + 2)(2 - 2a) = -1 \Rightarrow a = \pm\sqrt{\frac{5}{4}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

22 **Calcula la derivada de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{3x - 2x^2}{x - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{(1 - x^3) \cdot (x - 1)}{x + 1}$

c) $f(x) = \dfrac{6x - 2x\sqrt{x}}{9 - x}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$

a) $f'(x) = \dfrac{-2x^2 + 4x + 3}{(x-1)^2}$

b) $f'(x) = \dfrac{-3x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2}{(x+1)^2}$

c) $f'(x) = \dfrac{54 - 27\sqrt{x} + x\sqrt{x}}{(9-x)^2}$

d) $f'(x) = \dfrac{-2x - 1}{(x^2 + x + 1)^2}$

23 **Averigua las ecuaciones de las rectas, de pendiente $\dfrac{1}{2}$, tangentes a la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x - 3}{x - 1}$.**

$f'(x) = \dfrac{x + 1 - (x - 3)}{(x-1)^2} = \dfrac{2}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 3; x = -1$

$f(3) = 0$; $y - 0 = \dfrac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{2}$

$f(-1) = 2$; $y - 2 = \dfrac{1}{2}(x + 1) \Rightarrow y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{5}{2}$

24 **Calcula la derivada de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = e^{2x}$

b) $f(x) = (1 + x) \cdot 2^{x+1}$

c) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

d) $f(x) = \ln(x + e^{-x})$

e) $f(x) = \sqrt{2^{2x+1} + 1}$

f) $f(x) = \dfrac{3xe^{-x}}{\sqrt{e^x}}$

a) $f'(x) = 2e^{2x}$

b) $f'(x) = 2^{x+1} \cdot [1 + (1 + x)\ln 2]$

c) $f'(x) = \dfrac{-4}{e^{2x} + e^{-2x} - 2}$

d) $f'(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$

e) $f'(x) = \dfrac{2^{2x+1} \cdot \ln 2}{\sqrt{2^{2x+1} + 1}}$

f) $f'(x) = \dfrac{-9x + 6}{2e^x\sqrt{e^x}}$

25 **Deriva las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \sqrt[x]{x-2}$

b) $f(x) = (x \cdot e^x)^{\sqrt{x}}$

a) $f'(x) = \sqrt[x]{x-2}\left(\dfrac{-\ln(x-2)}{x^2} + \dfrac{1}{x^2-2x}\right)$

b) $f'(x) = (x \cdot e^x)^{\sqrt{x}}\left(\dfrac{x+\ln x}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1+x}{\sqrt{x}}\right)$

26 **Halla el punto de la gráfica de $y = x + \ln x$ en el que la recta tangente es perpendicular a la recta $2x + 6y = 5$.**

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} = 3 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow P\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} - \ln 2\right)$$

Ejercicios y problemas (páginas 162/166)

Reglas de derivación y función derivada

1 **Calcula la función derivada de estas funciones.**

a) $f(x) = (x^2+3x)^3$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$

c) $f(x) = (\ln x + 1)^2$

d) $f(x) = x^2 \cdot \log_7 x$

e) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x^2-2}$

f) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

g) $f(x) = 3x\sqrt{x^2-1}$

h) $f(x) = 2^x \ln(x+1)$

i) $f(x) = \dfrac{x\,e^x}{\ln x}$

j) $f(x) = x^2\, 2^x\, e^{2x}$

k) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + \ln x}{x^2}$

l) $f(x) = e^{-x^2}\sqrt{\ln x + 1}$

a) $f'(x) = (6x+9)\,(x^2+3x)^2$

b) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+4)^2}$

c) $f'(x) = \dfrac{2(\ln x + 1)}{x}$

d) $f'(x) = 2x\log_7 x + \dfrac{x}{\ln 7}$

e) $f'(x) = \dfrac{-3x^2-2x-6}{(x^2-2)^2}$

f) $f'(x) = e^{-x}(2x - x^2)$

g) $f'(x) = \dfrac{6x^2-3}{\sqrt{x^2-1}}$

h) $f'(x) = 2^x\left(\ln 2 \cdot \ln(x+1) + \dfrac{1}{x+1}\right)$

i) $f'(x) = \dfrac{e^x(\ln x + x\ln x - 1)}{(\ln x)^2}$

j) $f'(x) = 2^x e^{2x}(2x + x^2\ln 2 + 2x^2)$

k) $f'(x) = -\dfrac{3}{2x^2\sqrt{x}} + \dfrac{1-2\ln x}{x^3}$

l) $f'(x) = e^{-x^2}\left(-2x\sqrt{\ln x + 1} + \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x + 1}}\right)$

2 **Calcula la función derivada de estas funciones.**

a) $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$

b) $f(x) = 2^x\left(x + \sqrt{x}\right)$

c) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2-1}{(x+1)^2}\right)$

d) $f(x) = \ln\left(1-\sqrt{x}\right)^3$

e) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$

f) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

g) $f(x) = \sqrt{\ln\left(\sqrt{\ln x}\right)}$

h) $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 2e^x + 1}{\ln(x^2-2x+1)}$

i) $f(x) = x^{23}23^x + x^{17}\log_{17} x + x^{-3}$

j) $f(x) = \dfrac{3x^3 - 2x^2 + x - 1}{5x^{-3} - 8x^{-2} + 13x^{-1} - 21}$

a) $f'(x) = \dfrac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}$

b) $f'(x) = 2^{x-1}\left[2\ln 2\left(x + x^{1/2}\right) + 2 + x^{-1/2}\right]$

c) $f'(x) = \dfrac{2}{x^2-1}$

d) $f'(x) = \dfrac{-3}{2\left(\sqrt{x} - x\right)}$

e) $f'(x) = \dfrac{7}{8\sqrt[8]{x}}$

f) $f'(x) = \dfrac{4\sqrt{x^2 + x\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} + 1}{8\sqrt{\left(x^2 + x\sqrt{x}\right)\left(x + \sqrt{x + \sqrt{x}}\right)}}$

g) $f'(x) = \dfrac{1}{x\ln x\sqrt{\ln\left(\sqrt{\ln x}\right)}}$

h) $f'(x) = \dfrac{e^x - 1}{\ln(x-1)}\left(1 - \dfrac{e^x-1}{2(x-1)\ln(x-1)}\right)$

i) $f'(x) = x^{22}23^x(x\ln 23 + 23) + x^{16}\left(17\log_{17} x + \dfrac{1}{\ln 17}\right) - 3x^{-4}$

j) $f'(x) =$

$$= \dfrac{-189x^2 + 240x - 119 + 180x^{-1} - 61x^{-2} + 4x^{-3} + 15x^{-4}}{(5x^{-3} - 8x^{-2} + 13x^{-1} - 21)^2}$$

3 **De las siguientes funciones halla la derivada del orden que se indica:**

a) $f(x) = x^2e^x \quad \Rightarrow f^{4)}(x)$

b) $f(x) = 2^{1/x} \quad \Rightarrow f'''(x)$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} \quad \Rightarrow f^{4)}(x)$

d) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \quad \Rightarrow f'''(x)$

e) $f(x) = \dfrac{e^{-3x} + e^{3x}}{e^x} \quad \Rightarrow f'''(x)$

f) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} \quad \Rightarrow f''(x)$

a) $f^{4)}(x) = e^x(x^2 + 8x + 12)$

b) $f'''(x) = -2^{1/x}\left(\dfrac{\ln^3 2}{x^6} + \dfrac{6\ln^2 2}{x^5} - \dfrac{6\ln 2}{x^4}\right)$

c) $f^{4)}(x) = \dfrac{24(5x^4 - 10x^2 + 1)}{(x^2+1)^5}$

d) $f'''(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{(x^2-1)^3}} + \dfrac{3x^2}{\sqrt{(x^2-1)^5}}$

e) $f'''(x) = -64\,e^{-4x} + 8\,e^{2x}$

f) $f''(x) = \dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$

4 **Averigua la expresión de la derivada n–ésima de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = x \cdot e^{-x}$ ***b)*** $f(x) = 2^x$

a) $f^{n)}(x) = (-1)^n \cdot (x-n) \cdot e^{-x}$ *b)* $f^{n)}(x) = (\ln 2)^n \cdot 2^x$

5 Calcula la función derivada de las funciones indicadas a continuación.

a) $f(x) = (2x+1)^{\sqrt{x}}$ ***c)*** $f(x) = x^{x^2}$

b) $f(x) = (\ln x)^{x^2+1}$ ***d)*** $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$

a) $f'(x) = (2x+1)^{\sqrt{x}}\left[\dfrac{\ln(2x+1)}{2\sqrt{x}} + \dfrac{2\sqrt{x}}{2x+1}\right]$

b) $f'(x) = (\ln x)^{x^2+1}\left[2x\ln(\ln x) + \dfrac{x^2+1}{x\ln x}\right]$

c) $f'(x) = x^{x^2}(2x\ln x + x)$

d) $f'(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x\left[\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) - \dfrac{2x}{x^2-1}\right]$

6 Halla y' siendo $y = f(x)$.

a) $x + xy - x^2y^2 = 3$

b) $x^y = y^x$

a) $y' = \dfrac{2xy^2 - y - 1}{x - 2x^2y}$

b) $y' = \dfrac{y\cdot(x\ln y - y)}{x\cdot(y\ln x - x)}$

7 Si $f(x) = \sqrt{x}$, $g'(x) = \text{sen } 2x$ y $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$, determina $(f\circ g)'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ y $(g^{-1})'\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

$(f\circ g)'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = f'\left(g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)\cdot g'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{1/2}}\cdot \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$(g^{-1})'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{g'(g^{-1}(1/2))} = \dfrac{1}{g'(\pi/4)} = 1$

8 Dadas las funciones $f(x) = x^2 + \pi$ y $g(x) = \dfrac{1}{x+\pi}$, calcula la derivada en $x = 0$ de las funciones $f(g(x))$ y $g(f(x))$.

Aplicamos la regla de la cadena a la composición de estas funciones:

$f(g(x)) = \left(\dfrac{1}{x+\pi}\right)^2 + \pi$

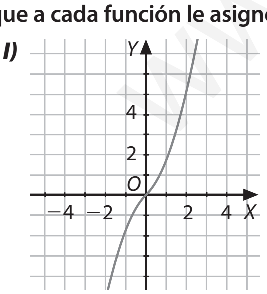
$g(f(x)) = \dfrac{1}{(x^2+\pi)+\pi}$

$[f(g(x))]' = \dfrac{2}{(x+\pi)^3} \Rightarrow [f(g(0))]' = -\dfrac{2}{\pi^3}$

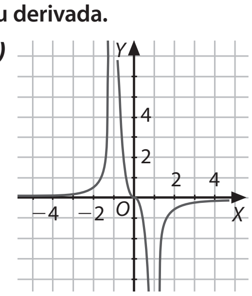
$[g(f(x))]' = -\dfrac{2x}{(x^2+2\pi)^2} \Rightarrow [g(f(0))]' = 0$

9 Relaciona las gráficas de las dos columnas, de manera que a cada función le asignes su derivada.

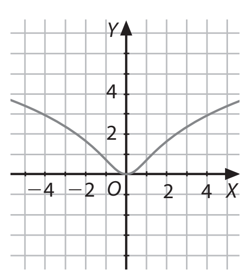
I)



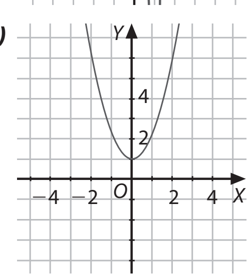
a)



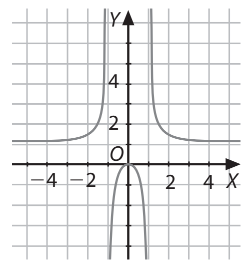
II)



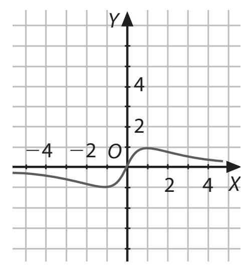
b)



III)

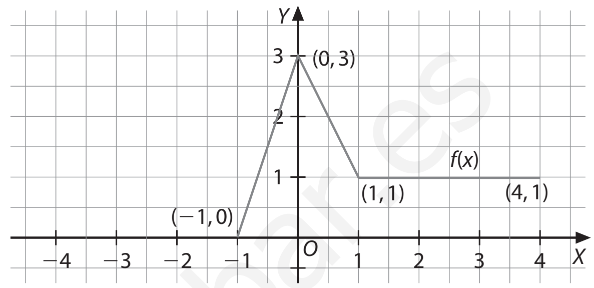


c)



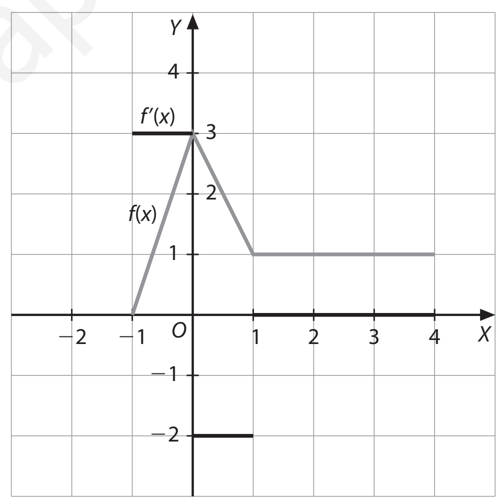
Las correspondencias son: I, *b;* II, *c;* III, *a*.

10 La gráfica de una función es la que se muestra en la figura. ¿Cuál es la gráfica de su función derivada? ¿En qué puntos no es continua la derivada?



La función derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } -1 < x < 0 \\ -2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x < 4 \end{cases}$$



f' no es continua en $x = 0$ y $x = 1$. Son puntos angulosos de f.

Derivada de una función en un punto

11 Considera la función definida por $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$ calcula el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 0$. Determina si hay otros puntos en los cuales la pendiente de la recta tangente sea igual a la obtenida.

Será necesario determinar $f'(0)$: $f'(x) = \dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(0) = -1$

Para determinar si existen otros puntos donde la pendiente de la recta tangente sea -1, se deberá resolver la ecuación:

$$\dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} = -1 \Rightarrow x = -2 \text{ y } x = 0$$

12 Aplica la definición de derivada de una función en un punto y calcúlala para las siguientes funciones en los puntos que se indica:

a) **$f(x) = -1 + x$ en $x = -1$**

b) **$f(x) = x^2 - 2x - 3$ en $x = 2$**

c) **$f(x) = (1 - x)^2 + 1$ en $x = 1$**

d) **$f(x) = \ln(2x + 1)$ en $x = 0$**

e) **$f(x) = \dfrac{-1}{x + 1}$ en $x = 2$**

f) **$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ en $x = -1$**

g) **$f(x) = \sqrt{x - 1}$ en $x = 1$**

a) $f(x) = -1 + x$ en $x = -1$

$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{-1 + (-1 + h) - (-2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

b) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ en $x = 2$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{(2 + h)^2 - 2(2 + h) - 3 - (-3)}{h} = \lim_{h \to 0} (2 + h) = 2$$

c) $f(x) = (1 - x)^2 + 1$ en $x = 1$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{[1 - (1 + h)]^2 + 1 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \to 0} h = 0$$

d) $f(x) = \ln(2x + 1)$ en $x = 0$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(2h + 1) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \ln(2h + 1)^{1/h} =$$

$$= \ln \lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{2h}}\right)^{\left(\frac{1}{2h}\right) \cdot 2} = \ln e^2 = 2$$

e) $f(x) = \dfrac{-1}{x + 1}$ en $x = 2$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{-1}{(2 + h) + 1} - \dfrac{1}{3}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{3h(3 + h)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{3(3 + h)} = \frac{1}{9}$$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ en $x = -1$

$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{(-1 + h)^2 + 1}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}}{h} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{(-1 + h)^2 + 1}}{h\sqrt{2}\sqrt{(-1 + h)^2 + 1}} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 - (1 - 2h + h^2) - 1}{h\sqrt{2}\,\sqrt{h^2 - 2h + 2}\,(\sqrt{2} + \sqrt{h^2 - 2h + 2})} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{h \to 0} = \frac{h(2 - h)}{h\sqrt{2}\,\sqrt{h^2 - 2h + 2}\,(\sqrt{2} + \sqrt{h^2 - 2h + 2})} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

g) $f(x) = \sqrt{x - 1}$ en $x = 1$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{(1 + h) - 1} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty \Rightarrow \nexists f'(1)$$

13 **Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 1/2\sqrt{x}$ en el punto de abscisa $x = 1$.**

Primero debemos averiguar la función derivada de f y, a continuación, el valor de la derivada en $x = 1$:

$$f'(x) = \frac{-1}{4\sqrt{x^3}} \Rightarrow f'(1) = \frac{-1}{4}$$

Ecuación de la recta tangente: $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$

$$\Rightarrow y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 1) \Rightarrow x + 4y - 3 = 0$$

14 **Averigua las ecuaciones de la tangente y la normal a la curva $f(x) = \ln(2 - x)$ en $x = 1$.**

Dom $f = (-\infty, 2)$. $f'(x) = \dfrac{-1}{2 - x} \Rightarrow f'(1) = -1$

Ecuación de la recta tangente: $y - 0 = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + 1$

Ecuación de la normal: $y - 0 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x - 1$

15 **Calcula las ecuaciones de las tangentes a la curva $2x^2 + y^2 = 1$ que pasan por el punto (1, 1).**

$$y = \sqrt{1 - 2x^2} \Rightarrow y' = \frac{-2x}{\sqrt{1 - 2x^2}}$$

Los puntos de la curva son de la forma $(a, \sqrt{1 - 2a^2})$.

En $x = a$, la pendiente de la recta tangente es:

$$y'(a) = \frac{-2a}{\sqrt{1 - 2a^2}}$$

Si la tangente debe pasar por el punto (1, 1), se debe cumplir:

$$\frac{-2a}{\sqrt{1 - 2a^2}} = \frac{\sqrt{1 - 2a^2} - 1}{a - 1} \Rightarrow a = 0 \text{ y } a = \frac{2}{3}$$

Las tangentes a la curva que pasan por (1, 1), la cortan, respectivamente, en (0, 1) y $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

Las respectivas tangentes tienen por ecuación:

$$y = 1 \qquad y = 4x - 3$$

16 **Halla el punto de la función $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ en que la recta tangente tiene pendiente -1 y escribe su ecuación.**

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

En $x = a$ la derivada es: $f'(a) = -1$

$\dfrac{2a}{a^2 + 1} = -1$, en $a = -1$ y la ecuación de la recta tangente es:

$y - f(-1) = -1(x + 1)$

Esto es: $y = -x + \ln 2 - 1$

17 **Averigua los puntos de la gráfica de la función $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x$, en que la recta tangente es paralela a la recta $2x - 3y + 5 = 0$.**

La pendiente de esta recta es: $m = \dfrac{2}{3}$.

Como $f'(x) = 9x^2 - 4x + 1$, debemos hallar para qué puntos, $x = a$, se cumple que $f'(a) = \dfrac{2}{3}$:

$$9x^2 - 4x + 1 = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad x = \frac{1}{9}$$

Para $x = \dfrac{1}{3}$, $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2}{9} \Rightarrow$ Uno de los puntos es: $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{9}\right)$

Para $x = \dfrac{1}{9}$, $f\left(\dfrac{1}{9}\right) = \dfrac{22}{243} \Rightarrow$ Otro punto es: $\left(\dfrac{1}{9}, \dfrac{22}{243}\right)$

18 **¿En qué punto la recta tangente a $f(x) = x \cdot e^x$ es paralela al eje de abscisas? Escribe la ecuación de la recta tangente en este punto.**

La recta tangente será horizontal cuando la derivada valga cero: $f'(x) = x \cdot e^x + e^x = 0 \Rightarrow x = -1$

El punto de tangencia es $P(-1, -e^{-1})$, y la recta tangente tiene ecuación: $y = -\dfrac{1}{e}$

19 **Calcula las abscisas de los puntos de la gráfica de $f(x) = 2x^3 + x^2 + x - 2$ en que la tangente es paralela a la secante que corta la curva en $x = 0$ y $x = 1$.**

La secante corta la curva en los puntos $(0, -2)$ y $(1, 2)$, buscamos las tangentes a la gráfica de pendiente 4.

Como $f'(x) = 6x^2 + 2x + 1$, tenemos:

$$6x^2 + 2x + 1 = 4 \Rightarrow 6x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{19}}{6}$$

20 **Halla el valor de a y b para que la recta tangente a la curva de $f(x) = ax^4 + bx^2 + 1$ en el punto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ sea paralela al eje de abscisas.**

La curva pasa por $(1/2, 0)$, por lo que:

$$\frac{a}{16} + \frac{b}{4} + 1 = 0 \ \Rightarrow a + 4b + 16 = 0$$

La pendiente de la tangente en $x = 1/2$ es cero:

$$f'(x) = 4ax^3 + 2bx \ \Rightarrow \ 0 = \frac{a}{2} + b$$

Se resuelve el sistema, y se obtiene: $a = 16$ y $b = -8$

21 **Averigua para que valor de x la recta tangente a la curva $y = \ln(x^2 + 1)$ es paralela a la recta $y = x$. Escribe la ecuación de esta recta tangente.**

La pendiente de la recta tangente ha de ser igual a 1. Por tanto es necesario igualar la derivada de $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ a 1.

$$\frac{2x}{x^2 + 1} = 1 \Rightarrow 2x = x^2 + 1 \Rightarrow x = 1$$

La ecuación de la recta tangente es $y = x + n$, el punto de tangencia es $(1, \ln 2)$, sustituyendo $\ln 2 = 1 + n \Rightarrow n = \ln 2 - 1$

La ecuación de la recta tangente es: $y = x + \ln 2 - 1$

22 **Dada la parábola $y = x^2$:**

a) **Halla la ecuación de su recta tangente que es paralela a la recta $-4x + y + 3 = 0$.**

b) **Halla las ecuaciones de sus tangentes que pasan por el punto $(2, 0)$.**

a) $y = 4x - 3 \Rightarrow m = 4$

$y' = 2x$; $m = 4 = y'(x) \Rightarrow x = 2$ en $x = 2$, $y = 4$

La ecuación de la recta tangente en $(2, 4)$, que tiene pendiente $m = 4$:

$$y - 4 = 4(x - 2) \Rightarrow y = 4x - 4$$

b) Las rectas tangentes a la curva $y = x^2$ son de la forma $y - a^2 = 2a(x - a)$

Que pasen por el punto $(2, 0)$: $0 - a^2 = 2a(2 - a)$ $\Rightarrow a = 0$ y $a = 4$

Por tanto las rectas buscadas son:

$$y = 0 \text{ e } y - 16 = 8(x - 4) \Rightarrow y = 8x - 16$$

23 **Considera la función $f(x) = \dfrac{3 - 2x}{x}$:**

a) **Halla los puntos de la gráfica en los cuales la recta tangente es paralela a la recta $3x + 4y + 5 = 0$.**

b) **Calcula la ecuación de estas rectas tangentes.**

a) $f'(x) = \dfrac{-3}{x^2}$, igualando a la pendiente de la recta dada, obtenemos: $-\dfrac{3}{x^2} = -\dfrac{3}{4} \Rightarrow x = \pm 2$

Los puntos son $P_1\,(2, -1/2)$ y $P_2\,(-2, -7/2)$

b) Por tanto las ecuaciones de las rectas son:

$$y + \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + 1$$

$$y + \frac{7}{2} = -\frac{3}{4}(x + 2) \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x - 5$$

24 **Calcula la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \ln(3x - 2)$ en $x = 2$, y en qué punto la tangente es perpendicular a la anterior.**

$$f'(x) = \frac{3}{3x - 2} \ \Rightarrow \ f'(2) = \frac{3}{4}$$

La perpendicular tiene pendiente $-4/3$, por tanto:

$$\frac{-4}{3} = \frac{3}{3x - 2} \ \Rightarrow \ x = \frac{-1}{12}$$

Pero $\text{Dom } f = (2/3, +\infty)$, por lo que no existe ningún punto del dominio de f en el que la tangente tenga pendiente $\dfrac{-4}{3}$.

25 **Dada la función $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$, averigua los puntos en que la recta tangente es perpendicular a la tangente en el punto de abscisa $x = -1$.**

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$, puesto que $x^2 + x + 1 > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} \ \Rightarrow \ \text{Dom } f' = \mathbb{R}$$

$f'(-1) = -1 \ \Rightarrow$ Las rectas perpendiculares a esta tangente tienen pendiente 1.

$$f'(x) = 1 \text{ si } 1 = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} \ \Rightarrow \ x = 0 \text{ y } x = 1$$

Los puntos buscados son $(0, 0)$ y $(1, \ln 3)$.

26 **Averigua el número de rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 4x$ que contienen el punto $(0, 1)$.**

Los puntos de la curva son de la forma $(a, a^3 - 4a)$, y la pendiente de la tangente en este punto es $m = 3a^2 - 4$.

Si la tangente debe pasar por $(0, 1)$:

$$3a^2 - 4 = \frac{a^3 - 4a - 1}{a} \ \Rightarrow \ a = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}}$$

Solo hay una tangente a f que pase por $(0, 1)$.

27 **Determina en qué punto $a \in (0, \pi)$, la tangente a la curva $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x)$ es perpendicular a la bisectriz del primer cuadrante.**

$f'(x) = \operatorname{cotg} x$

$$f'(a) = -1 \ \Rightarrow \ \operatorname{cotg} a = -1 \ \Rightarrow \ a = \frac{3\pi}{4}$$

28 **Dada la parábola de ecuación $y = x^2 - 2x + 5$, halla la ecuación de la recta tangente que es paralela a la recta que une los puntos de dicha parábola de abscisas $x = 1$ y $x = 3$.**

Si $x = 1$, $f(1) = 4$.

Si $x = 3$, $f(3) = 8$.

La pendiente de la recta secante que pasa por $(1, 4)$ y $(3, 8)$ es $m = 2$.

Como $y' = 2x - 2$, imponemos $y'(a) = 2 \ \Rightarrow \ 2 = 2a - 2$ $\Rightarrow \ a = 2$

Si $a = 2$, $f(2) = 5$, por lo que la ecuación de la tangente es: $y - 5 = 2(x - 2)$, es decir, $y = 2x + 1$.

29 **Halla los puntos de la parábola $y = -2(x - 2)^2$ cuya recta tangente pasa por el origen de coordenadas. A continuación averigua las ecuaciones de dichas tangentes.**

Los puntos de la parábola son de la forma: $(a, -2(a - 2)^2)$

La pendiente en el punto de abscisa a es:

$$m(a) = -4a + 8$$

Como el otro punto por el que debe pasar la tangente es $(0, 0)$, deberá cumplirse:

$-4a+8=\dfrac{-2(a-2)^2}{a} \Rightarrow -4a^2+8a=-2a^2+8a-8$

$\Rightarrow\ 2a^2=8\ \Rightarrow\ a=\pm 2$

Si $x=2$, entonces $y=0$; la pendiente de la tangente en este punto es $m=0$, por lo que su ecuación es $y=0$.

Si $x=-2$, entonces $y=-32$; la pendiente de la tangente en este punto será $m=16$, por lo que su ecuación será $y=16x$.

30 **Dada la función $f(x)=x^3$, averigua si la recta tangente a la gráfica de esta función en el punto de abscisa 3 pasa por el punto (1, 5).**

A continuación, encuentra todas las rectas del plano que pasan por el punto (1, 5) y son tangentes a la gráfica en algún punto.

Para averiguar la ecuación de la tangente en $x=3$, calculamos $f'(3)$. Como $f'(x)=3x^2\ \Rightarrow\ f'(3)=27$.

La ecuación buscada será:

$y-f(3)=f(3)\cdot(x-3) \Rightarrow y-27=27\,(x-3) \Rightarrow y=27x-54$

Como $5\neq 27\cdot 1-54$, la tangente no pasa por (1, 5).

Todas las rectas que pasen por (1, 5) que sean tangentes a la gráfica de f, también deben pasar por el punto (a, a^2), y además, su pendiente debe ser $m=3a^2$. Por tanto:

$$3a^2=\frac{a^3-5}{a-1}$$

Solucionamos la ecuación resultante: $2a^3-3a^2+5=0$.

	2	−3	0	5
−1		−2	5	−5
	2	−5	5	0

$2a^3-3a^2+5=(a+1)(2a^2-5a+5)=0$, solo se cumple para $a=-1$, pues el otro factor es un polinomio irreducible.

Por tanto, hay una única recta tangente a la gráfica de f que pase por (1, 5), que es la tangente trazada por el punto de abscisa -1:

$$y-(-1)^3=2(-1)^2\,(x-(-1))\ \Rightarrow\ y=3x+2$$

31 **Se considera la función $f(x)=x^2+m$, donde $m>0$ es una constante.**

a) **Para cada valor de m halla el valor $a>0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ pase por el origen de coordenadas.**

b) **Halla el valor de m para que la recta $y=x$ sea tangente a la gráfica de $f(x)$.**

a) $f'(a)=2a$ en el punto $(a, f(a))$

Si pasa por el origen de coordenadas: $y=2ax \Rightarrow a^2+m=2a^2$ $\Rightarrow a=\pm\sqrt{m}$

b) Si $f'(a)=1 \Rightarrow m=1/4$

32 **Halla la derivada de $f(x)=ax+b+e^{-x}$. Calcula a y b si el punto (0, 0) es un punto de la curva $y=f(x)$ en que la recta tangente es el eje X.**

$f'(x)=a-e^{-x}$

$f(0)=0\ \Rightarrow b=-1$

$f'(0)=0=a-1 \Rightarrow a=1$

Continuidad y derivabilidad

33 **Indica en qué puntos $f(x)=|2x^2+x-1|$ no es derivable.**

La función f no es derivable en $x=1/2$ y en $x=-1$, puesto que sus derivadas laterales no coinciden:

$$\left.\begin{array}{l} f'_-(-1)=-3\ \text{ y }\ f'_+(-1)=3 \\ f'_-\left(\frac{1}{2}\right)=-3\ \text{ y }\ f'_+\left(\frac{1}{2}\right)=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Son puntos angulosos.}$$

34 **Estudia la derivabilidad de la función $f(x)=\sqrt{|x|}$ en $x=0$.**

Se desdobla la función: $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x} & \text{si } x<0\\ \sqrt{x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

Entonces, $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{2\sqrt{-x}} & \text{si } x<0\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x>0\end{cases}$

En $x=0$, se observa que $f'_-(0)=-\infty$ y $f'_+(0)=+\infty$.

En $x=0$, hay un punto de retroceso.

35 **Razona si son derivables en el cero cada una de las siguientes funciones de variable real.**

a) $f(x)=\begin{cases}x-1 & \text{si } x<0\\ 2 & \text{si } x=0\\ x+3 & \text{si } x>0\end{cases}$ ***b)*** $g(x)=\sqrt{x^3+x^2}$

a) $f(x)$ no es continua en $x=0$, por tanto no es derivable en $x=0$.

b) $f'(x)=\dfrac{3x^2+2x}{2\sqrt{x^3+x^2}}$, la derivada no existe en $x=0$.

36 **Justifica si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. En el caso de que consideres que la afirmación es falsa, pon un ejemplo ilustrativo.**

a) **Para cualquier función polinómica de segundo grado existe un punto tal que la recta tangente a la función en ese punto es una recta paralela al eje de abscisas.**

b) **Si $h: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ verifican $h'(x)=g'(x)$, entonces $h(x)=g(x)$.**

a) En toda función polinómica de grado dos hay un máximo o un mínimo, y en ese punto la derivada es nula, por lo que la recta tangente es horizontal, paralela al eje de abscisas.

b) Que la derivada de dos funciones sea la misma, no significa que las funciones sean la misma, pueden diferir en una constante.

37 **Estudia la derivabilidad de la función:**

$$f(x)=\begin{cases}e^x & \text{si } x\leq 0\\ 1-x^2 & \text{si } 0<x\leq 1\\ x & \text{si } x>1\end{cases}$$

En primer lugar debemos estudiar si la función es continua.

Para $x<0$, es exponencial, luego continua en su dominio.

Para $0<x<1$, es polinómica, y por tanto, continua en su dominio.

Para $x>1$, es polinómica, luego, continua en su dominio.

En $x=0$, $f(0)=1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^x=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} (1-x^2)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=1$$

Como $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, f es continua en $x=0$.

En $x=1$, $f(1)=0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x^2)=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1} f(x)$$

Por tanto, la función no es continua en $x=1$.

La función es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$.

Por tanto, en $x=1$ no será derivable.

En $x = 0$, dado que las funciones que componen f son derivables, podemos hacer:

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ -2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$f'(0)$ existirá si $f'_-(0) = f'_+(0)$:

$$\left.\begin{array}{l} f'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^x = 1 \\ f'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} (-2x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \nexists\, f'(0) \text{ porque las derivadas} \\ \text{laterales son finitas y distintas:} \\ \text{es un punto anguloso.} \end{array}\right.$$

Por tanto, Dom $f' = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

38 **Estudia la derivabilidad de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} E(x-1) & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{4-2x}{x^2-9} & \text{si } 2 \le x \le 4 \\ \ln\left(\sqrt{x}+1\right) & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

La función *parte entera de* $(x - 1)$ es una función escalonada, por tanto, no es derivable en $x = z < 2$, y su derivada vale cero para $x < 2$ y $x \ne z$, con $z \in \mathbb{Z}$.

En (2, 4), la función es racional y su denominador se anula en $x = 3$, por lo que en este punto la función no es continua y, por tanto, no es derivable.

Para valores de $x > 4$, la función es logarítmica con un argumento estrictamente positivo, por lo que es continua y derivable en su dominio.

En $x = 2$, $f(2) = 0$.

Puesto que $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = E(1) = 1$, la función no es continua en $x = 2$, y por tanto, no es derivable.

$$f(4) = -\frac{4}{7}$$

$\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \ln 3$, por lo que la función no es continua en $x = \pi$, y tampoco es derivable.

Conclusión: la función es derivable en $\mathbb{R}$, excepto en los valores enteros $z \le 4$.

39 **Sea f la función definida por**

$$\begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x \ge 0 \\ xe^{-x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Estudia la derivabilidad de f en $x = 0$ y, si es posible, calcula la derivada de f en dicho punto.

En $x = 0$, la función es continua.

Las derivadas laterales en $x = 0$ deben ser iguales:

$$\left.\begin{array}{l} f'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^x - 1 - 0}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = 1 \\ f'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{xe^{-x^2} - 0}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0) = 1$$

También podemos escribir:

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x > 0 \\ (1 - 2x^2)e^{-x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_-(0) = 1 \\ f'_+(0) = 1 \end{cases}$$

puesto que las dos funciones son derivables y su derivada es continua.

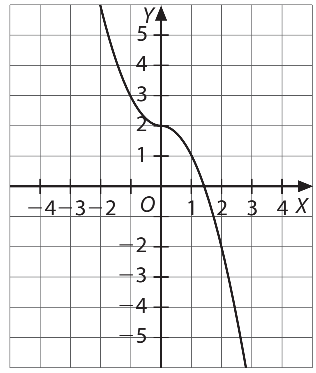
40 **Sea f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2 - x|x|$.**

a) **Esboza la gráfica de f.**

b) **Estudia la derivabilidad de f en $x = 0$.**

c) **Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.**

a) $f(x) = \begin{cases} 2 + x^2 & \text{si } x > 0 \\ 2 - x^2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$



b) $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ -2x & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_-(0) = 0 \\ f'_+(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow f'(0) = 0$

c) En $x = 2$, $f'(2) = -4$ y $f(2) = 2 - 2^2 = -2$

$y + 2 = -4(x - 2) \Rightarrow y = -4x + 6$

41 **Estudia la derivabilidad de f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 - |x|} & \text{si } x \ne -1 \text{ y } x \ne 1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \text{ o } x = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x} & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \\ \dfrac{x}{1+x} & \text{si } -1 < x < 0 \\ \dfrac{x}{1-x} & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{x}{1-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En $x = 1$ y $x = -1$ no es continua, por tanto no es derivable en estos puntos.

42 **Estudia la derivabilidad de f: $(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por:**

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3 + x^2} - x & \text{si } 0 < x \le 1 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{x^2}{4} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calcula la función derivada.

La función no es continua en $x = 1$, por tanto en $x = 1$ no es derivable.

Las dos funciones son derivables, y su derivada es continua, por lo que:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{3 + x^2}} - 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{-1}{x^2} - \dfrac{x}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

43 **Considera esta función: $f(x) = \begin{cases} \ln(1 - x) & \text{si } x \le 0 \\ -x + ax^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$**

¿Existen valores de a con los cuales f sea derivable en toda la recta real? En cualquier caso, razona la respuesta y, si es afirmativa, encuentra dichos valores.

La función es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$. En $x = 0$, la función es continua, puesto que la imagen de 0 existe y los límites laterales en $x = 0$ también y coinciden con la imagen.

Solo hay que averiguar si la función es derivable en $x = 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ -1 + 2ax & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_-(0) = 1 & \text{si } x < 0 \\ f'_+(0) = 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Luego las derivadas laterales en $x = 0$ coinciden, es decir, $f'(0) = -1$.

La función es derivable para todo valor de a.

44 **Se sabe que f: $(-1, 1) \to \mathbb{R}$ definida por**

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - \dfrac{1}{2}x + c & \text{si } -1 < x < 0 \\ \sqrt{1-x} & \text{si } 0 \le x < 1 \end{cases}$$

es derivable en el intervalo $(-1, 1)$.

a) **Determina el valor de la constante c.**

b) **Calcula la función derivada f'.**

c) **Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f que son paralelas a la recta de ecuación $y = -x$.**

a) Si la función es derivable en $(-1, 1)$, tendrá que ser necesariamente continua en $x = 0$: $c = 1$

b) Ambas funciones son derivables en su dominio y vemos que su derivada es continua:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x - 1/2 & \text{si } -1 < x < 0 \\ \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} & \text{si } 0 \le x < 1 \end{cases}$$

c) Son las que tienen pendiente $m = -1$

Si $-1 < x < 0$, $4x - 1/2 = -1 \Rightarrow x = -1/8$

Si $0 \le x < 1$, $\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} = -1 \Rightarrow x = 3/4$

$$f\left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{35}{32} \Rightarrow y - \frac{35}{32} = -1\left(x + \frac{1}{8}\right)$$

$$\Rightarrow y = -x + \frac{31}{32}$$

$f(3/4) = 1/2 \Rightarrow y - 1/2 = -1(x - 3/4) \Rightarrow y = -x + 5/4$

45 **Determina los valores de los parámetros a y b para que la función siguiente sea continua y derivable en $x = 2$.**

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x + 3 & \text{si } x < 2 \\ x^3 + bx + 5 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

Imponemos, en primer lugar, que la función sea continua en $x = 2$, para ello es necesario que los límites laterales sean iguales y coincidan con el valor de la función:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (ax^2 + 2x + 3) = 4a + 7 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^3 + bx + 5) = 13 + 2b \end{array} \right. \Rightarrow 4a + 7 = 13 + 2b$$

Para estudiar la derivabilidad buscaremos las derivadas laterales en $x = 2$.

$f'_-(x) = 2ax + 2 \Rightarrow f'_-(2) = 4a + 2$

$f'_+(x) = 3x^2 + b \Rightarrow f'_+(2) = 12 + b \Rightarrow 4a + 2 = 12 + b$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 4a - 2b = 6 \\ 4a - b = 10 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{7}{2}, b = 4$$

46 **Determina el valor del parámetro a para que la siguiente función:**

$$f(x) = \begin{cases} x \log x & \text{si } 0 < x \le 1 \\ a(1 - e^{-x}) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

sea derivable en $x = 1$.

En primer lugar, hay que estudiar la continuidad de f en $x = 1$:

$f(1) = 1 \cdot \log 1 = 1 \cdot 0 = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} a(1 - e^{-x}) = a(1 - e^{-1}) \end{array} \right\}$$

Para que exista el límite, los laterales deben coincidir:

$$0 = a(1 - e^{-1}) \Rightarrow a = 0$$

Con $a = 0$, la función es continua en $x = 1$, pero entonces:

$$f'(x) = \begin{cases} \log x + 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'_-(1) = 1 \\ f'_+(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'_-(1) \ne f'_+(1)$$

Como las derivadas laterales en $x = 1$ son distintas, f no es derivable en $x = 1$ para ningún valor de a, ya que f' no depende de a.

47 **Averigua el valor de los parámetros a y b para que la siguiente función sea derivable en $x = 1$:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + b & \text{si } x \le 1 \\ a \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Primero hay que imponer que sea continua: $f(1) = 1 - a + b$

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 - ax + b) = 1 - a + b \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} a \ln x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - a + b = 0$$

A continuación hay que imponer que las derivadas laterales en $x = 1$ sean iguales. Podemos escribir:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - a & \text{si } x < 1 \\ a/x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'_-(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x - a) = 2 - a \\ f'_+(1) = \lim\limits_{x \to 1^+} (a/x) = a \end{array} \right\} \Rightarrow 2 - a = a \Rightarrow a = 1$$

Si $a = 1 \Rightarrow 1 - a + b = 0 \Rightarrow b = 0$

48 **Se sabe que la función f: $[0, 5] \to \mathbb{R}$ definida por**

$$f(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & \text{si } 0 \le x < 2 \\ -4 + \sqrt{x-1} & \text{si } 2 \le x \le 5 \end{cases}$$

es derivable en el intervalo $(0, 5)$. Calcula las constante a y b.

Imponemos que sea continua en $x = 2$: $2a + 4b = -4 + 1 \Rightarrow 2a + 4b = -3$

Imponemos que sea derivable en $x = 2$: $a + 4b = 1/2$

Resolviendo el sistema se obtiene: $a = -7/2$ y $b = 1$

49 **Determina b y c para que la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \le 2 \\ -x^2 + bx + c & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) **Sea derivable en todos los puntos de $\mathbb{R}$.**

b) **Calcula la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa 1.**

a) En primer lugar, $f(x)$ debe ser continua en $x = 2$:

$f(2) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 8$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -4 + 2b + c$, luego se debe cumplir $8 = -4 + 2b + c$.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x < 2 \\ -2x + b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Para que sea derivable en $x = 2$: $f'_-(2) = f'_+(2)$

$$\left. \begin{array}{l} f'_-(2) = \lim\limits_{x \to 2^-} (3x^2) = 12 \\ f'_+(2) = \lim\limits_{x \to 2^+} (-2x + b) = -4 + b \end{array} \right\} \Rightarrow 12 = -4 + b$$

Luego si $b = 16$ y $c = -20$, la función es derivable en $\mathbb{R}$.

b) En $x = 1$, $f(x) = x^3$, $f(1) = 1$ y $f'(1) = 3$: $y - 1 = 3(x - 1) \Rightarrow y = 3x - 2$

50 **Determina:**

a) **Los valores de las constantes *a* y *b* sabiendo que la gráfica de la función *f*: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:**

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \le 0 \\ ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

admite recta tangente en el punto (0, 1).

b) **Los valores de las constantes *c* y *d* para las cuales la gráfica de la función *g*: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:**

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \le 0 \\ cx^2 + d & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

admita recta tangente en el punto (0, 1).

a) Si admite recta tangente en (0, 1), significa que $f(0) = 1$, y es continua y derivable en $x = 0$.

Que sea continua en $x = 0$: $1 = b$

Que sea derivable en $x = 0$: $-1 = a$

b) Que sea continua en $x = 0$: $1 = d$

Que sea derivable en $x = 0$: $-1 = 0$, y esto no es posible.

51 **Calcula los valores de *a* y *b* para que la función:**

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2ae^x & \text{si } 0 \le x < 1 \\ ax^2 + xe + b & \text{si } 1 \le x \end{cases}$$

sea continua para todo valor de *x*. Estudia la derivabilidad de *f*(*x*) para los valores de *a* y *b* obtenidos.

Las funciones son continuas en su dominio de definición, por ser polinómicas.

Para que sea continua en $x = 0$:

$f(0) = 2a$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (3x + 2) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 + 2ae^x) = 2a \end{cases}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2 = 2a \Rightarrow a = 1$

Para que sea continua en $x = 1$:

$f(1) = a + e + b = 1 + e + b$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 + 2ae^x) = 1 + 2e \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (ax^2 + xe + b) = 1 + e + b \end{cases}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1 + 2e = 1 + e + b \Rightarrow b = e$

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 2e^x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2x + e & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

En $x = 0$:

$$\begin{cases} f'_-(0) = 3 \\ f'_+(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{En } x = 0 \text{ la función no es derivable.}$$

$$\begin{cases} f'_-(1) = 2 + 2e \\ f'_+(1) = 2 + e \end{cases} \Rightarrow \text{En } x = 1 \text{ la función no es derivable.}$$

Ejercicios de aplicación

52 **Dada la función $f(x) = 1 - x^2$, se pide:**

a) **Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto $P(a, f(a))$, donde $0 < a < 1$.**

b) **Halla los puntos *A* y *B* en los que la recta hallada en el apartado *a)* corta a los ejes vertical y horizontal respectivamente.**

c) **Determina el valor de $a \in (0, 1)$ para el cual la distancia entre el punto *A* y el punto $P(a, f(a))$ es el doble de la distancia entre el punto *B* y el punto $P(a, f(a))$.**

a) $m = f'(a) = -2a$

La recta tangente es: $y - (1 - a^2) = -2a(x - a)$
$\Rightarrow y = a^2 - 2ax + 1$

b) En $x = 0$, $A(0, a^2 + 1)$. En $y = 0$, $B\left(\dfrac{a^2 + 1}{2a}, 0\right)$.

c) En un punto $P(a, 1 - a^2)$:

$d(P, A) = 2d(P, B) \Rightarrow \left|(-a, 2a^2)\right| = 2\left|\left(\dfrac{1 - a^2}{2a}, a^2 - 1\right)\right|$

$\Rightarrow a = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Debe ser $0 < a < 1$, por lo que: $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

53 **Sea *f*: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función continua definida por**

$$f(x) = \begin{cases} |2 - x| & \text{si } x < a \\ x^2 - 5x + 7 & \text{si } x \ge a \end{cases}$$

donde *a* es un número real.

a) **Determina *a*.**

b) **Halla la función derivada de *f*.**

a) Si es continua en $x = a$: $|2 - a| = a^2 - 5a + 7$

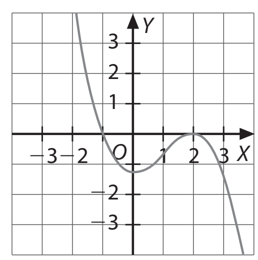
$$\Rightarrow \begin{cases} 2 - a = a^2 - 5a + 7 \\ 2 - a = -a^2 + 5a - 7 \end{cases} \Rightarrow a = 3$$

b) $f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x \le 2 \\ x - 2 & \text{si } 2 < x \le 3 \\ x^2 - 5x + 7 & \text{si } x > 3 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 < x < 3 \\ 2x - 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

La función no es derivable en $x = 2$, hay un punto anguloso.

En $x = 3$, la función no es derivable, también hay un punto anguloso.

54 **La curva *f*(*x*) de la figura tiene por dominio el conjunto de los números reales.**



a) **Determina los puntos en los que la función vale 0 y los valores de *x* para los cuales la función es positiva.**

b) **Calcula en qué puntos se anula la derivada y en qué puntos $f'(x) < 0$.**

c) **Halla la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 2$.**

d) **Determina la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = -1$, sabiendo que $f'(x)$ comienza por $-x^2$.**

e) **Determina *a* sabiendo que $f(x) = a(x + 1)(x - 2)^2$.**

a) Vale 0 para $x = -1$ y para $x = 2$ y es positiva para $x < -1$.

b) Se anula para $x = 0$ y para $x = 2$ y $f'(x) < 0$ para $x < 0$ y $x > 2$.

c) La recta tangente para $x = 2$ es $y = 0$.

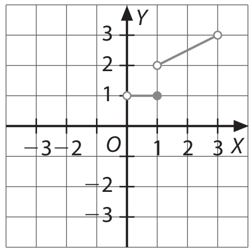
d) $f'(x) = kx(x - 2) = k(x^2 - 2x)$ si sabemos que el coeficiente de x^2 es -1, entonces $k = -1$ y por tanto:

$m = f'(-1) = -1 - 2 = -3$ y pasa por el punto $(-1, 0)$

Luego su ecuación será: $y = -3x - 3$

e) Si $f'(x) = x^2 + 2x$ y $f(x) = a(x + 1)(x - 2)^2$ derivando se obtiene $f'(x) = 3ax^2 - 6ax$ e igualando concluimos: $a = -1/3$

55 **En la figura se puede ver parte de la gráfica de una función *f* que está definida en el intervalo $(-3, 3)$ y que es simétrica respecto al origen de coordenadas.**



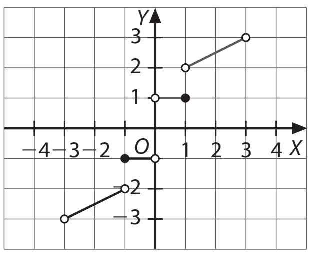
a) **Razona cuál debe ser el valor de $f(0)$.**

b) **Copia y completa la gráfica de *f*.**

c) **Halla $f'(x)$ para los $x \in (-3, 3)$ en los que dicha derivada exista.**

a) No existe $f(0)$.

b)



c) $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } -3 < x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 < x < 3 \end{cases}$

56 **Un globo de radio *r*, que contiene hidrógeno, aumenta su volumen un 5 %. Calcula su variación de área.**

$V(r) = \dfrac{4\pi r^3}{3} \qquad dV = 4\pi r^2\, dr$

$S(r) = 4\pi r^2 \qquad dS = 8\pi r\, dr$

Esto significa que: $dS = \dfrac{2\,dV}{r}$

Como $dV = 0{,}05V$, tenemos:

$$dS = \frac{0{,}1\left(\dfrac{4\pi r^3}{3}\right)dr}{r} = \frac{S \cdot 0{,}1}{3}\,dr$$

La variación de área, $\dfrac{dS}{dr}$, es de 3,33 %.

57 **Dadas las curvas $y = x^2 - 1$ y $x^2 + xy - 1 = 0$, averigua sus puntos de intersección y calcula las pendientes de las rectas tangentes en cada uno de ellos. A continuación, halla para cada punto el ángulo que forman dichas tangentes.**

Solucionando el sistema formado por las ecuaciones de ambas curvas se obtienen dos puntos de intersección: $(1, 0)$ y $(-1, 0)$.

$y = x^2 - 1 \Rightarrow y' = 2x \Rightarrow y'(1) = 2$ e $y'(-1) = -2$

En $(1, 0)$ la pendiente de la tangente es $m = 2$, y en $(-1, 0)$, $m = -2$.

$x^2 + xy - 1 = 0 \Rightarrow 2x + y + xy' = 0$

$\Rightarrow y' = \dfrac{-2x - y}{x} \Rightarrow y'(1) = -2$ e $y'(-1) = -2$

En los dos puntos la pendiente de la recta tangente es $m = -2$.

En el punto $(-1, 0)$ la tangente es la misma, por lo que el ángulo que forman ambas tangentes es cero.

En el punto $(1, 0)$ calculamos el ángulo que forman las dos tangentes, aplicando:

$$\text{tg}\,(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta}{1 + \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta}$$

Podemos tomar $\text{tg}\,\alpha = -2$ y $\text{tg}\,\beta = 2$, por lo que:

$\text{tg}\,(\alpha - \beta) = \dfrac{-4}{1-4} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow (\alpha - \beta) = 53{,}13°$, que es el ángulo que forman las dos tangentes en el punto $(1, 0)$.

58 **Halla la ecuación de las tangentes a la curva de ecuación $2x^2 - y^2 + xy = 0$ en el punto $x = 1$.**

Si $x = 1 \Rightarrow 2 - y^2 + y = 0 \Rightarrow y = -1$ e $y = 2$, por lo que los puntos son $(1, -1)$ y $(1, 2)$.

Derivamos implícitamente:

$4x - 2yy' + y + xy' = 0 \Rightarrow y' \cdot (x - 2y) = -4x - y$

$\Rightarrow y' = \dfrac{y + 4x}{2y - x}$

En $(1, -1)$: $y' = \dfrac{-1+4}{-2-1} = -1$

por lo que la ecuación de la tangente será:

$$y + 1 = (-1)(x - 1) \Rightarrow y = -x$$

En $(1, 2)$: $y' = \dfrac{2+4}{4-1} = 2$

por lo que la ecuación de la tangente será:

$$y - 2 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x$$

59 **Calcula los valores de *a* para los que las tangentes a las curvas $y = e^x$ e $y = e^{-2x}$ en los puntos (a, e^a) y (a, e^{-2a}) sean perpendiculares.**

En $x = a$ se deberá cumplir que el producto de las pendientes de las rectas tangentes sea -1.

Puesto que $(e^x)' = e^x \Rightarrow (e^x)'(a) = e^a$

$(e^{-2x})' = -2e^{-2x} \Rightarrow (e^{-2x})'(a) = -2e^{-2a}$

Debe ser: $e^a \cdot (-2e^{-2a}) = -1 \Rightarrow -2e^{-a} = -1$

$\Rightarrow e^{-a} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow -a = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow a = \ln 2$

60 **A partir del enunciado anterior, estudia si puede existir algún valor de *a* para que las tangentes en los puntos indicados sean paralelas.**

Las pendientes deben ser iguales si las tangentes han de ser paralelas. Sería $(e^x)' = e^x > 0$, y $(e^{-2x})' = -2e^{-2x} < 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, lo cual no es posible.

61 **Un incendio se extiende en forma circular de manera uniforme. El radio del círculo quemado crece a la velocidad constante de 1,8 m/min.**

a) **Determina el área quemada en función del tiempo *t* transcurrido desde el inicio del incendio.**

b) **Calcula la velocidad de crecimiento del área del círculo quemado en el instante en que el radio llegue a 45 m.**

a) $A = \pi\,(1{,}8t)^2 = 3{,}24\pi t^2$ m², donde *t* está expresado en minutos.

b) $v(t) = 6{,}48\,\pi\,t$ m²/min

Cuando $r = 45$ m, entonces: $t = \dfrac{45}{1{,}8} = 25$ min

$v(25) = 6{,}48\,\pi \cdot 25 \cong 508{,}94$ m²/min

Actividades tipo test

Escoge y razona la respuesta correcta en cada caso:

62 **Considera la función $f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 3$ y la recta r: $2x + y = 6$.**

Determina, si es posible, un punto de la gráfica de f en el que la recta tangente sea r.

a) **(1, 4)** ***b)*** **(4, 1)** ***c)*** **(4, 0)**

La respuesta correcta es la ***a)***. Veámoslo:

La pendiente debe ser $m = -2$

$f'(x) = 3x^2 - 10x + 5$

$$\text{Si } 3x^2 - 10x + 5 = -2 \Rightarrow x = \begin{cases} \dfrac{7}{3} \\ 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f\left(\dfrac{7}{3}\right) = \dfrac{4}{27} \\ f(1) = 4 \end{cases}$$

$$\text{En } \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{27}\right): y - \frac{4}{27} = -2\left(x - \frac{7}{3}\right) \Rightarrow y = -2x - \frac{130}{27}$$

En (1, 4): $y - 4 = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + 6$

El punto es (1, 4).

63 **Considera la función f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:**

$$f(x) = \begin{cases} 3ax + b & \text{si } x \leq 0 \\ e^{x(ax + b)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Determina a y b sabiendo que f es derivable.

a) $a = b = 1$

b) $a = \dfrac{1}{3}$ **y** $b = -1$

c) $a = \dfrac{1}{3}$ **y** $b = 1$

La respuesta correcta es la ***c)***. Veámoslo:

La función polinómica es continua y derivable en $x < 0$ y la exponencial es continua y derivable en $x > 0$.

Si es derivable en $x = 0$, en primer lugar debe ser continua en $x = 0$: $b = 1$

Además debe ser derivable en $x = 0$: $3a = b$

De lo que se deduce que: $a = \dfrac{1}{3}$ y $b = 1$

64 **Calcula el ángulo que forman las rectas tangentes a las curvas de ecuaciones $xy = 1$ y $x^2 - y^2 = 1$, en los puntos de intersección de dichas curvas.**

a) **Puntos de intersección: (a, b) y $(-a, -b)$. Son perpendiculares las tangentes en ambos puntos.**

b) **Puntos de intersección: (a, b) y $(-a, -b)$. En (a, b) las tangentes son perpendiculares y en $(-a, -b)$ forman un ángulo de 45°.**

c) **Puntos de intersección: (a, b) y $(-a, -b)$. En (a, b) las tangentes son perpendiculares y en $(-a, -b)$ forman un ángulo de 0°.**

La respuesta correcta es la ***a)***. Veámoslo:

Para obtener la función en forma explícita, empezamos despejando la variable y en cada una de las ecuaciones:

$$y = \frac{1}{x} \quad ; \quad y = \sqrt{x^2 - 1}$$

En la segunda ecuación hemos considerado únicamente el signo positivo de la raíz, pero a continuación debemos considerar los puntos en los que la imagen es negativa, puesto que se trata de una hipérbola simétrica respecto del origen de coordenadas.

Si se intenta calcular el punto de intersección de estas dos funciones, vemos que es más práctico considerar que se intersectan en (a, b) (además las curvas se intersectan en $(-a, -b)$).

$y' = \dfrac{-1}{x^2}$; en el punto de intersección, la pendiente de la tangente es: $y'(a) = \dfrac{-1}{a^2} = \dfrac{-b}{a}$

$y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$; en el punto de intersección, la pendiente de la tangente es: $y'(a) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 - 1}} = \dfrac{a}{b}$

Se observa que el producto de las pendientes es $\dfrac{-b}{a} \cdot \dfrac{a}{b} = -1$, por lo que las tangentes en (a, b) son perpendiculares. Y, por simetría, también lo son en $(-a, -b)$, que es el otro punto de intersección.

1. Calcula la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = \ln\sqrt{1+x^2}$

b) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}\sqrt[3]{x^2-7}$

c) $f(x) = x^2e^x + x\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{\sqrt{2x}}{2^x}$

d) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

e) $f(x) = \dfrac{xe^{-x}}{\sqrt{x}}$

a) $f'(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

b) $f'(x) = \dfrac{e^x}{x}\left(\dfrac{x-1}{x}\sqrt[3]{x^2-7} + \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-7)^2}}\right) = e^x\dfrac{3x^3-x^2-21x+21}{3x^2\sqrt[3]{(x^2-7)^2}}$

c) $f'(x) = xe^x(x+2) - \ln x + \ln(2)\sqrt{x}\cdot 2^{\frac{1}{2}-x} - \dfrac{2^{-x\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}} - 1$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

e) $f'(x) = \dfrac{1-2x}{2e^x\sqrt{x}}$

2. Halla el valor de *a* y de *b* para que la siguiente función sea derivable en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} a(1+e^x) & \text{si } x < 0 \\ b + \ln(x+1) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Para que sea derivable debe ser continua, luego $\lim\limits_{x\to 0^-} a(1+e^x) = 2a = \lim\limits_{x\to 0^+} b + \ln(x+1) = b$

Basta pues que $2a = b$ para que sea continua, ya que cada parte es continua en su dominio. Para que sea derivable deben coincidir también las derivadas laterales en el 0:

$f'_-(0) = a$ y $f'_+(0) = 1$ por lo tanto, a debe ser igual a 1, pero no solo, pues la función debe ser continua, lo que requiere también $2a = b$, y por lo tanto $b = 2$.

3. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} ae^x + b\ln(x+1) & \text{si } x < 0 \\ e^{2x} - a\ln(x+1) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Halla los valores de *a* y de *b* para que sea derivable en $\mathbb{R}$.

En primer lugar necesitamos que la función sea continua, en su dominio: $(-1, +\infty)$

Por ser ambas funciones continuas, nos basta asegurar que también lo será en $x = 0$ para que lo sea en todo su dominio:

- $\lim\limits_{x\to 0^-} (ae^x + b\ln(x+1)) = a$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} (e^{2x} - a\ln(x+1)) = 1$

Luego basta que $a = 1$ para que la función sea continua.

Estudiamos ahora sus derivadas laterales en $x = 0$:

- $f'_-(0) = ae^0 + \dfrac{b}{0+1} = a + b = 1 + b$
- $f'_+(0) = e^{2\cdot 0} - \dfrac{a}{0+1} = 1 - a = 0$

Por tanto, si $b = -1$ (siendo $a = 1$) la función será derivable para todo valor de x mayor que -1, es decir, dentro de su dominio de definición.

4. Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2}$ en el punto de abscisa $x = -1$.

Ambas rectas pasarán por el punto $(-1, f(-1)) = (-1, 0)$, para la pendiente necesitaremos la función derivada: $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{(x+1)}}$

Cuando estudiamos su dominio, vemos que $-1 \notin \text{Dom } f'(x)$, la derivada no está definida en el punto $x = -1$ y por lo tanto no existe ni recta tangente, ni recta normal.

5. **Dada la función $f(x) = \dfrac{x+1}{e^x}$, determina la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto en el que se anula la segunda derivada.**

En primer lugar debemos encontrar el punto en qué se anule la segunda derivada, y para eso calculamos las primeras dos derivadas:

$f'(x) = \dfrac{e^x(1-x-1)}{e^{2x}} = -xe^{-x}$ $\qquad\qquad$ $f''(x) = (-1)e^{-x} + (-x)\cdot(e^{-x}) = e^{-x}(x-1)$

Por lo tanto el punto en que se anula la segunda derivada es: $x = 1$, $(1, f(1)) = (1, 2/e)$

La recta tangente vendrá dada por $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow y - \dfrac{2}{e} = -\dfrac{1}{e}(x-1)$ o lo que es igual $x + ey - 3 = 0$.

6. **Halla el valor de a y de b para que la función $f(x) = ax^3 - 2x^2 + b$ su recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$ sea $y = 5x + 1$.**

En primer lugar la función debe pasar por el punto (1, 6), o sea $f(1) = a(1)^3 - 2(1)^2 + b = 6$, $a + b = 8$.

Por otro lado $f'(1) = 5$, donde $f'(x) = 3ax^2 - 4x$, por tanto: $3a - 4 = 5 \Rightarrow a = 3$

Volviendo a la ecuación previa obtenemos el valor de $b = 5$.

7. **Una persona camina a una velocidad constante de 3 m/s y se aleja horizontalmente y en línea recta desde la base de una farola cuyo foco se encuentra a 10 m de altura. Sabiendo que la altura de la persona es 1,70 m, calcula:**

a) **La longitud de la sombra cuando la persona se encuentra a 5 m de la farola.**

b) **La velocidad de crecimiento de la sombra a los *t* segundos de empezar a andar.**

a) Si x es la longitud de la sombra, se puede plantear por semejanza de triángulos:

$$\frac{10}{1{,}70} = \frac{5+x}{x} \Rightarrow x \cong 1{,}024 \text{ m}$$

b) A los t segundos, la persona se encuentra a $d = 3t + d(t)$ m de la farola.

Podemos, del mismo modo, escribir:

$$\frac{10}{1{,}70} = \frac{3t + d(t)}{d(t)} \Rightarrow 10\,d(t) = 5{,}1t + 1{,}7\,d(t) \Rightarrow 8{,}3\,d(t) = 5{,}1t \Rightarrow d(t) = 0{,}614t$$

Luego la velocidad a la que crece la sombra, que es constante, es: $v = d'(t) = 0{,}614$ m/s