Resuelve las siguientes inecuaciones polinómicas:

a) $x^3 - 4x > 0$

- Ceros: $x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x \cdot (x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{x = 0} \\ x^2 - 4 = 0 \ \ (*) \end{cases}$

$(*)\ \ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} \underline{x = -2} \\ \underline{x = 2} \end{cases}$

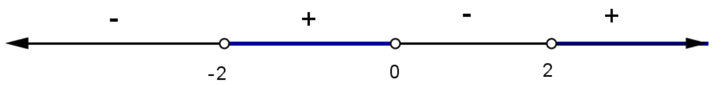
- Luego, factorizando, tenemos: $\underline{x^3 - 4x > 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+2) > 0}$

$x = -3 \Rightarrow (-)(-)(-) = -$

$x = -1 \Rightarrow (-)(-)(+) = +$

$x = 1 \Rightarrow (+)(-)(+) = -$

$x = 3 \Rightarrow (+)(+)(+) = +$



Solución: $x \in (-2,0) \cup (2,+\infty)$

b) $x^3 - 3x - 2 \leq 0$

- Ceros: $x^3 - 3x - 2 = 0$

Posibles raíces = {divisores de -2 }={$\pm 1, \pm 2$}

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & -2 \\ 2 & & +2 & +4 & +2 \\ \hline & 1 & +2 & +1 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow x^3 - 3x - 2 = (x-2)\underbrace{(x^2 + 2x + 1)}_{\text{Identidad notable}} = (x-2)(x+1)^2$$

$$x^3 - 9x^2 + 15x + 25 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow \underline{x = 2} \\ (x+1)^2 = 0 \Rightarrow \underline{x = -1}\,(\text{doble}) \end{cases}$$

Por tanto, los ceros del polinomio son: $x = 2$ y $x = -1\,(\text{doble})$

- Luego, factorizando, tenemos: $\underline{x^3 - 3x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)^2 \leq 0}$

$x = -2 \Rightarrow (-)(+) = -$

$x = 0 \Rightarrow (-)(+) = -$

$x = 3 \Rightarrow (+)(+) = +$

Solución: $x \in (-\infty, 2]$

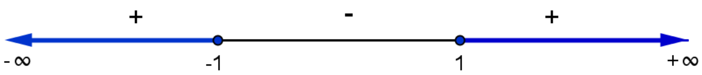
c) $x^4 - 1 \geq 0$

- Ceros: $x^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow \underline{x = 1} \\ x + 1 = 0 \Rightarrow \underline{x = -1} \end{cases}$

Por tanto, los ceros del polinomio son: $x = -1$ y $x = 1$

- Luego, factorizando, tenemos: $\underline{x^4 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x^2+1) \geq 0}$

$x = -2 \Rightarrow (-)(-)(+) = +$ $\quad$ $x = 0 \Rightarrow (-)(+)(+) = -$ $\quad$ $x = 2 \Rightarrow (+)(+)(+) = +$



Solución: $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

d) $x^3 - x^2 - 6x > 0$

- Ceros: $x^3 - x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x \cdot (x^2 - x - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{x = 0} \\ x^2 - x - 6 = 0 \;\; (*) \end{cases}$

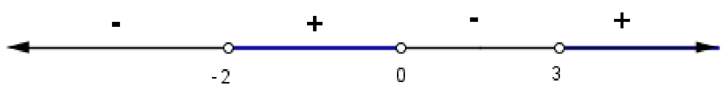
$(*)$ $x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \dfrac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \underline{x = 3} \\ \underline{x = -2} \end{cases}$

- Luego, factorizando, tenemos: $\underline{x^3 - x^2 - 6x > 0 \Leftrightarrow x(x-3)(x+2) > 0}$

$x = -3 \Rightarrow (-)(-)(-) = -$ $\quad$ $x = 1 \Rightarrow (+)(-)(+) = -$

$x = -1 \Rightarrow (-)(-)(+) = +$ $\quad$ $x = 4 \Rightarrow (+)(+)(+) = +$

Solución: $x \in (-2, 0) \cup (3, +\infty)$



e) $x^4 - 5x^2 \geq 36 \Rightarrow \underline{x^4 - 5x^2 - 36 \geq 0}$

- Ceros: $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

1) Hacemos el cambio de variable $\underline{x^2 = t}$ y la ecuación se convierte en la ecuación de 2º grado:

$$t^2 - 5t - 36 = 0$$

2) Resolvemos la ecuación de segundo grado: $t^2 - 5t - 36 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} = \dfrac{5 \pm 13}{2} = \begin{cases} t = 9 \\ t = -4 \end{cases}$

3) Deshacemos el cambio de variable

- $t = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3$
- $t = -4 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x = \sqrt{-4} \Rightarrow$ no existe solución real

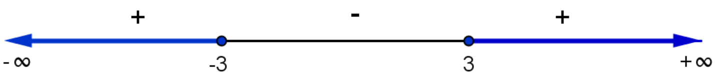
Por tanto, los ceros del polinomio son**:** $x=-3$ y $x=3$

- Luego, factorizando, tenemos: $\underline{x^4-5x^2-36\geq 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-3)(x^2+4)\geq 0}$

$$
\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 1 & 0 & -5 & 0 & -36 \\
+3 & & +3 & +9 & +12 & +36 \\
\hline
 & 1 & +3 & +4 & +12 & \boxed{0} \\
-3 & & -3 & 0 & -12 & \\
\hline
 & 1 & 0 & +4 & \boxed{0} &
\end{array}
\qquad \Rightarrow x^4-5x^2-36=(x-3)(x+3)(x^2+4)
$$

Es decir, tenemos que resolver la inecuación: $\underline{(x+3)(x-3)(x^2+4)\geq 0}$

$x=-4 \Rightarrow (-)(-)(+)=+$ $\qquad$ $x=0 \Rightarrow (+)(-)(+)=-$ $\qquad$ $x=4 \Rightarrow (+)(+)(+)=+$



<u>Solución</u>: $x\in(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$

f) $x^3-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2}\leq 0 \xrightarrow{\cdot(2)} \underline{2x^3-x^2+2x-1\leq 0}$

- <u>Ceros</u>: $x^3-x^2+2x-1=0$

Posibles raíces enteras = {divisores de -1}={±1}

Posibles raíces fraccionarias = $\left\{\frac{\text{divisores de } -1}{\text{divisores de } 2}\right\}=\left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$

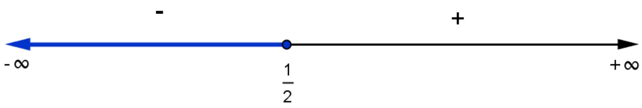
$$
\begin{array}{r|rrr|r}
 & 2 & -1 & +2 & -1 \\
\frac{1}{2} & & +1 & 0 & +1 \\
\hline
 & 2 & 0 & +2 & \boxed{0}
\end{array}
\qquad \Rightarrow 2x^3-x^2+2x-1=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+2)
$$

$$2x^3-x^2+2x-1=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow \underline{x=\frac{1}{2}} \\ 2x^2+2=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow \nexists \text{ solución real} \end{cases}$$

Por tanto, el cero del polinomio es**:** $x=\frac{1}{2}$

- Luego, factorizando, tenemos: $\underline{2x^3-x^2+2x-1\leq 0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+2)\leq 0}$

$x=0 \Rightarrow (-)(+)=-$ $\qquad$ $x=1 \Rightarrow (+)(+)=+$



Solución: $x \in \left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$

g) $2x^2(x^2-1)-3x^2 < -3-x^3+x \Rightarrow 2x^4-2x^2-3x^2+3+x^3-x<0 \Rightarrow \underline{2x^4+x^3-5x^2-x+3<0}$

<u>Tenemos que resolver la inecuación</u>: $2x^4+x^3-5x^2-x+3<0$

- <u>Ceros</u>: $2x^4+x^3-5x^2-x+3=0$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 2 & +1 & -5 & -1 & +3 \\
-1 & & -2 & +1 & +4 & -3 \\ \hline
 & 2 & -1 & -4 & +3 & \boxed{0} \\
+1 & & +2 & +1 & -3 & \\ \hline
 & 2 & +1 & -3 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$\Rightarrow (x+1)(2x^3-x^2-4x+3)$

$\Rightarrow (x+1)(x-1)(2x^2+x-3)$

$$2x^4+x^3-5x^2-x+3=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)(2x^2+x-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow \underline{x=-1} \\ x-1=0 \Rightarrow \underline{x=1} \\ 2x^2+x-3=0 \ \ (*) \end{cases}$$

$$(*)\ \ 2x^2+x-3=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{4}=\frac{-1\pm 5}{4}=\begin{cases} x=\dfrac{4}{4} \Rightarrow \underline{x=1} \\ x=\dfrac{-6}{4} \Rightarrow \underline{x=-\dfrac{3}{2}} \end{cases}$$

Por tanto, los ceros del polinomio son: $x=1$(doble) $\quad x=-1 \quad$ y $\quad x=-\dfrac{3}{2}$

- Luego, factorizando, tenemos:

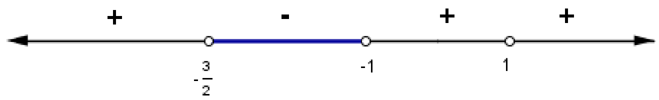
$$2x^4+x^3-5x^2-x+3<0 \Leftrightarrow 2(x-1)^2(x+1)\left(x+\frac{3}{2}\right)<0 \underset{:2}{\Leftrightarrow} (x-1)^2(x+1)\left(x+\frac{3}{2}\right)<0$$

$x=-2 \Rightarrow (+)(-)(-)=+$

$x=-1{,}25 \Rightarrow (+)(-)(+)=-$

$x=0 \Rightarrow (+)(+)(+)=+$

$x=4 \Rightarrow (+)(+)(+)=+$



Solución: $x \in \left(-\dfrac{3}{2}, -1\right)$

h) $x^5 - 9x^4 + 15x^3 + 25x^2 \le 0$

- Ceros: $x^5 - 9x^4 + 15x^3 + 25x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (x^3 - 9x^2 + 15x + 25) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow \underline{x = 0} \text{ (doble)} \\ \\ x^3 - 9x^2 + 15x + 25 = 0 \;\; (*) \end{cases}$

$(*)\;\; x^3 - 9x^2 + 15x + 25 = 0$

Posibles raíces $= \{\text{divisores de } 25\} = \{\pm 1, \pm 5, \pm 25\}$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -9 & +15 & +25 \\ 5 & & +5 & -20 & -25 \\ \hline & 1 & -4 & -5 & \boxed{0} \end{array} \quad \Rightarrow x^3 - 9x^2 + 15x + 25 = (x-5)(x^2 - 4x - 5)$$

$x^3 - 9x^2 + 15x + 25 = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x^2 - 4x - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 = 0 \Rightarrow \underline{x = 5} \\ \\ x^2 - 4x - 5 = 0 \;\; (**) \end{cases}$

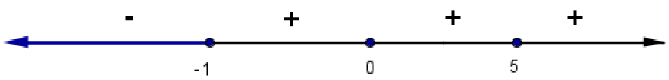
$(**)\;\; x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \dfrac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} \underline{x = 5} \\ \underline{x = -1} \end{cases}$

Por tanto, los ceros del polinomio son**:** $x = 0$ (doble) $\quad x = 5$ (doble) $\quad$ y $\quad x = -1$

- Luego, factorizando, tenemos: $\underline{x^5 - 9x^4 + 15x^2 + 25x^2 \le 0 \Leftrightarrow x^2 (x-5)^2 (x+1) \le 0}$

$x = -2 \Rightarrow (+)(+)(-) = -$ $\qquad\qquad$ $x = 1 \Rightarrow (+)(+)(+) = +$

$x = -0{,}5 \Rightarrow (+)(+)(+) = +$ $\qquad\qquad$ $x = 4 \Rightarrow (+)(+)(+) = +$



Solución: $x \in (-\infty, -1] \cup \{0, 5\}$

i) $2x^3-5x(x+1)\le -3-x \Rightarrow 2x^3-5x^2-5x+3+x\le 0 \Rightarrow \underline{2x^3-5x^2-4x+3\le 0}$

Tenemos que resolver la inecuación: $2x^3-5x^2-4x+3\le 0$

- Ceros

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & -4 & +3 \\ -1 & & -2 & +7 & -3 \\ \hline & 2 & -7 & +3 & \boxed{0} \end{array} \qquad \Rightarrow 2x^3-5x^2-4x+3=(x+1)(2x^2-7x+3)$$

$$2x^3-5x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow (x+1)(2x^2-7x+3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow \underline{x=-1} \\ 2x^2-7x+3=0 \ \ (*) \end{cases}$$

$$(*) \ \ 2x^2-7x+3=0 \Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{4}=\frac{7\pm 5}{4}=\begin{cases} \underline{x=3} \\ \underline{x=\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Por tanto, los ceros del polinomio son**:** $x=-1$, $x=3$ y $x=\frac{1}{2}$

- Luego, factorizando, tenemos:

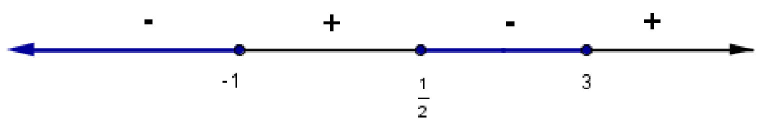
$$\underline{2x^3-5x^2-4x+3\le 0 \Leftrightarrow 2(x+1)(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)\le 0 \underset{(:2)}{\Leftrightarrow} (x+1)(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)\le 0}$$

$x=-2 \Rightarrow (-)(-)(-)=-$

$x=0 \Rightarrow (+)(-)(-)=+$

$x=2 \Rightarrow (+)(-)(+)=-$

$x=4 \Rightarrow (+)(+)(+)=+$



Solución: $x\in(-\infty,-1]\cup\left[\frac{1}{2},3\right]$