

Límites

Ejercicios resueltos

4.2-1 Resolver los siguientes límites:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}; & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{x^2 - 25}; & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}; \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}; & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}; & \text{f) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \end{array}$$

Solución

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$ indeterminación de la forma $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$. Para evitarla, descomponemos en factores numerador y denominador, simplificamos y por último sustituimos x por -1 :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = -\frac{3}{2}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{x^2 - 25}$ indeterminación de la forma $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$. Para evitarla, descomponemos en factores numerador y denominador, simplificamos y por último sustituimos x por 5 :

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{x^2 - 25} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{(x+5)(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x+5} = \frac{1}{10}$$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$ indeterminación de la forma $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$. Para evitarla, racionalizamos, simplificamos y por último sustituimos x por 3 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$ indeterminación de la forma $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$. Para evitarla, racionalizamos, simplificamos y por último sustituimos x por 0:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{2})(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})}{x(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2-2}{x(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

- e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$ indeterminación de la forma $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$. Para evitarla, descomponemos en factores numerador y denominador, simplificamos y por último sustituimos x por 2:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{(x-2)} = \pm\infty$$

- f) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$ indeterminación de la forma $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$. Para evitarla, realizamos las operaciones que se nos indica en el numerador, simplificamos y por último sustituimos h por 0:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2 \end{aligned}$$

4.2-2 Resolver: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x + \sqrt[3]{x}}$

Solución

Indeterminación de la forma $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$. Para evitarla, dividimos numerador y denominador por x :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x + \sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x+3}{x}}{\frac{x + \sqrt[3]{x}}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{\sqrt[3]{x}}{x}} = 2$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{x}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = 0 \end{aligned} \right\}$$

4.2-3 Resolver: $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$

Solución

Indeterminación de la forma $\{\infty - \infty\}$. Para evitarla, en primer lugar racionalizamos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x^2+1-x^2)}{(\sqrt{x^2+1}+x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(\sqrt{x^2+1}+x)} \end{aligned}$$

En la última expresión dividimos numerador y denominador por x , con lo cual obtenemos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x}}{\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}$$

4.2-4 Resolver: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

Solución

Indeterminación de la forma $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. Para evitarla, dividimos numerador y denominador por \sqrt{x} :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{x}}} = 1$$

4.2-5 Sabemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Resolver:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+5}$; c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$; e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$

Solución

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ Indeterminación de la forma $\{1^\infty\}$

Tenemos que escribirlo de la forma del número e : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Hacemos un cambio de variable: $T = -(x+1) \Rightarrow x = -T-1$
 Si $x \rightarrow -\infty \Rightarrow T \rightarrow \infty$

Con este cambio:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-T-1}\right)^{-T-1} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{T+1}\right)^{-T-1} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{T+1-1}{T+1}\right)^{-T-1} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{T}{T+1}\right)^{-(T+1)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{T+1}{T}\right)^{(T+1)} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{T}\right)^{(T+1)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{T}\right)^T \left(1 + \frac{1}{T}\right) = e \cdot 1 = e \end{aligned}$$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+5}$ Indeterminación de la forma $\{1^\infty\}$

Tenemos que escribirlo de la forma del número e : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 = e \cdot 1 = e$$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x}$ Indeterminación de la forma $\{1^\infty\}$

Tenemos que escribirlo de la forma del número e : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^3 = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^3 = e^3$$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$ Indeterminación de la forma $\{1^\infty\}$

Tenemos que escribirlo de la forma del número e : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^x \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{2} = T \Rightarrow x = 2T \\ x \rightarrow \infty \Rightarrow T \rightarrow \infty \end{array} \right\} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{T}\right)^{2T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{T}\right)^T\right]^2 = e^2 \end{aligned}$$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$ Indeterminación de la forma $\{1^\infty\}$

Tenemos que escribirlo de la forma del número e : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-1}\right)^{(x-1)+4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-1}{4}}\right)^{(x-1)+4} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-1}{4} = T \Rightarrow x-1 = 4T \\ x \rightarrow \infty \Rightarrow T \rightarrow \infty \end{array} \right\} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{T}\right)^{4T+4} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{T}\right)^{4T} \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{T}\right)^4 = e^4 \cdot 1 = e^4 \end{aligned}$$

4.2-6 Resolver: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} + \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}} \right)$

Solución

Indeterminación de la forma $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$. Sabemos que el límite de una suma es la suma de los límites, por lo tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} + \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}} = 1 + 1 = 2$$

También lo podríamos resolver racionalizando.

4.2-7 Resolver: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^4 + 2n^3} - (n^2 + n) \right)$

Solución

Indeterminación de la forma $\{\infty - \infty\}$. Racionalizamos:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^4 + 2n^3} - (n^2 + n) \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{n^4 + 2n^3} - (n^2 + n) \right) \left(\sqrt{n^4 + 2n^3} + (n^2 + n) \right)}{\left(\sqrt{n^4 + 2n^3} + (n^2 + n) \right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^3 - (n^2 + n)^2}{\left(\sqrt{n^4 + 2n^3} + (n^2 + n) \right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^3 - n^4 - 2n^3 - n^2}{\left(\sqrt{n^4 + 2n^3} + (n^2 + n) \right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2}{\sqrt{n^4 + 2n^3} + (n^2 + n)} \end{aligned}$$

Dividiendo numerador y denominador por n^2 obtenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1 + \frac{1}{n}} = -\frac{1}{2}$$

4.2-8 Resolver: $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$

Solución

Indeterminación de la forma $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$. Racionalizamos, descomponemos en factores, simplificamos y finalmente sustituimos x por 7:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49} &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(2 - \sqrt{x-3})(2 + \sqrt{x-3})}{(x^2 - 49)(2 + \sqrt{x-3})} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{4 - (x-3)}{(x^2 - 49)(2 + \sqrt{x-3})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{7 - x}{(x-7)(x+7)(2 + \sqrt{x-3})} = - \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x-7}{(x-7)(x+7)(2 + \sqrt{x-3})} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{(x+7)(2 + \sqrt{x-3})} = - \frac{1}{14 \cdot 4} = - \frac{1}{56} \end{aligned}$$

4.2-9 Resolver: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

Solución

Indeterminación de la forma $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$. Racionalizamos, simplificamos y sustituimos x por cero:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x - (1-x)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = 1 \end{aligned}$$

4.2-10 Resolver: $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$

Solución

Indeterminación de la forma $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$.

Vamos a realizar un cambio de variable. Como el mínimo común de los índices de las raíces es 6:

$$y = \sqrt[6]{x}$$

Si $x \rightarrow 64 \Rightarrow y \rightarrow \sqrt[6]{64} = 2$ con lo cual:

$$\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{y^3 - 8}{y^2 - 4}$$

Descomponemos en factores, simplificamos y sustituimos y por 2:

$$\lim_{y \rightarrow 2} \frac{y^3 - 8}{y^2 - 4} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{(y-2)(y^2 + 2y + 4)}{(y-2)(y+2)} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{(y^2 + 2y + 4)}{y+2} = 3$$
