

Matemáticas aplicadas a las CCSS II - 2º de Bachillerato
Examen Final de la Segunda Evaluación - 16 de marzo de 2010

1. Calcular los siguientes límites. Indicar el tipo de indeterminación y el razonamiento que lleva a la obtención del resultado. Si se obtiene ∞ debes indicar su signo tanto por la izquierda como por la derecha caso de que x tienda a un punto.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 - x^2 + 2x - 6x^4 + 1}{4x^2 - 6x^3 + x - 2}$ (1 punto)

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2}{x^3 - 2x^2 - 2x + 1}$ (1 punto)

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{2x^3 - 9x^2 + 12x - 4}$ (1 punto)

2. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x+1} & \text{si } x < -1 \\ 2x - 1 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ -x^2 + 2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, se pide:

a) Estudiar la continuidad de la función en los puntos $x = 1$ y $x = -1$. Caso de que no sea continua decir el tipo de discontinuidad que se presenta.

(2 puntos)

b) Realizar la representación gráfica de la función. (1 punto)

3. Dada la función $f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - x - 2}$, hallar o estudiar lo que se pide en los siguientes apartados, contestando con detalle a cada uno de ellos:

a) Dominio. (0,3 puntos)

b) Puntos de corte con los ejes. (0,7 puntos)

c) Continuidad. (1 punto)

d) Asíntotas. (1 punto)

e) Representación gráfica. (1 punto)

Soluciones

• Ejercicio 1:

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 - x^2 + 2x - 6x^4 + 1}{4x^2 - 6x^3 + x - 2} = \left[\text{Indet } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^4}{-6x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

Obsérvese que cuando el grado del numerador es mayor que el grado del denominador el límite es ∞ , y su signo depende de los términos de mayor grado tanto del numerador como del denominador.

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2}{x^3 - 2x^2 - 2x + 1} = \frac{-3}{0} = \infty = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \rightarrow -1^- \\ -\infty & \text{si } x \rightarrow -1^+ \end{cases}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{2x^3 - 9x^2 + 12x - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(x-2)^2}{(2x-1)(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{2x-1} = \frac{3}{3} = 1$$

• Ejercicio 2:

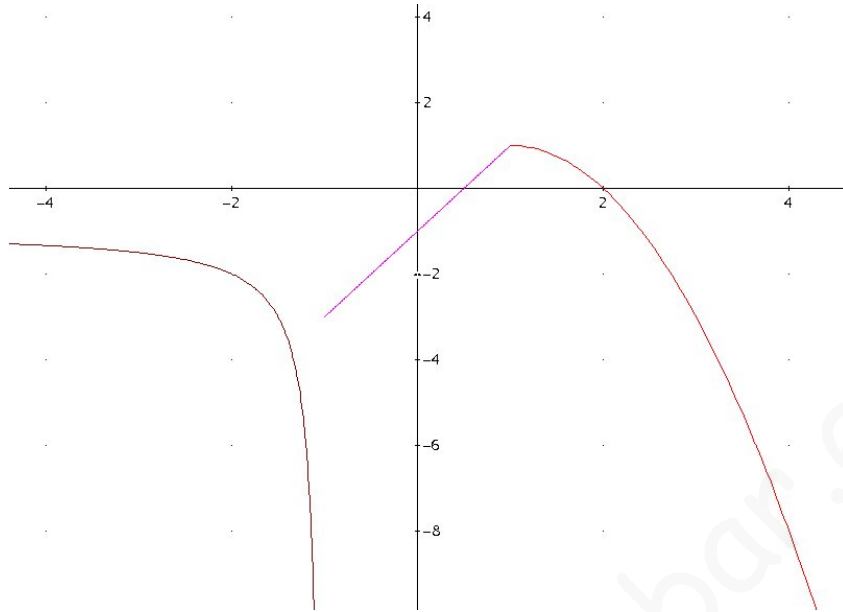
Escribamos la función: $f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x+1} & \text{si } x < -1 \\ 2x - 1 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ -x^2 + 2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) Estudiemos la continuidad en los puntos $x = -1$ y $x = 1$

$$\checkmark x = -1: \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-x}{x+1} = \frac{1}{0} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} (2x - 1) = -3 \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \Rightarrow f \text{ no es continua en el punto } x = -1. \text{ Hay una discontinuidad de salto infinito en este punto.}$$

$$\checkmark x = 1: \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x - 1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x^2 + 2x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1. \text{ Además } f(1) = 1. \text{ Por tanto } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 = f(1) \Rightarrow f \text{ es continua en } x = 1.$$

b) Representación gráfica:



• Ejercicio 3:

Escribamos la función: $f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - x - 2}$

a) Esta función es racional. Por tanto su dominio son todos los números reales salvo aquellos que anulen el denominador.

La ecuación $x^2 - x - 2 = 0$ tiene dos soluciones: $x = -1$ y $x = 2$. Así pues $Dom f = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$.

b) ✓ Punto de corte con el eje Y. Haciendo $x = 0$ se tiene $y = \frac{3}{2}$. Por tanto el punto de corte con el eje Y es $\left(0, \frac{3}{2}\right)$

✓ Punto de corte con el eje X. Haciendo $y = 0 \Rightarrow \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - x - 2} = 0 \Rightarrow 2x^2 + x - 3 = 0$, ecuación que tiene por soluciones $x = -\frac{3}{2}$ y $x = 1$. Por tanto los puntos de corte con el eje X son $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ y $(1, 0)$

c) La función es continua en todo su dominio. Veamos qué tipo de discontinuidad se da en los puntos $x = -1$ y $x = 2$:

✓ $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - x - 2} = \frac{-2}{0} = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow -1^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow -1^+ \end{cases}$. Por tanto, en el punto $x = -1$ hay una discontinuidad de salto infinito. Además, la recta $x = -1$ es una asíntota vertical.

✓ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - x - 2} = \frac{3}{0} = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow 2^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 2^+ \end{cases}$. Por tanto, en $x = 2$ hay una

discontinuidad de salto infinito. Además, la recta $x = 2$ es otra asíntota vertical.

d) Las asíntotas verticales ya se han hallado en el apartado anterior. Veamos las horizontales: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - x - 2} = 2$. Entonces $y = 2$ es una asíntota horizontal.

e) Representación gráfica:

