5 LÍMITES DE FUNCIONES Y CONTINUIDAD

El estudio del cálculo de límites será el hilo conductor de la unidad, los alumnos aprenderán a trabajar con ellos y comprobarán su aplicación a la hora de interpretar funciones y en particular estudiar su continuidad, los distintos tipos de discontinuidades y las propiedades de las funciones continuas.

Al inicio de esta unidad se define el concepto de límite de una función, límites laterales en un punto y en el infinito, así como las respectivas asíntotas verticales y horizontales.

A continuación, se desarrolla la aritmética de límites, desde las operaciones básicas (suma, multiplicación y división) hasta la exponenciación, pasando por la composición de funciones.

En la segunda parte de la unidad se introducen; primero la noción de continuidad de una función en un punto y los diferentes tipos de discontinuidades (evitable, de salto finito y esenciales) y tras esto, la continuidad de una función en un intervalo.

La metodología se ha diseñado incluyendo actividades de aprendizaje integradas que permitirán al alumnado avanzar hacia los resultados de aprendizaje de más de una competencia al mismo tiempo.

Se desarrolla la **competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología** a lo largo de toda la unidad. A través del estudio de las funciones y sus propiedades, se desarrolla en el alumno la capacidad de aplicar el razonamiento lógico-matemático y sus herramientas para describir e interpretar distintas situaciones, así como crear e interpretar modelos de dependencia funcional. Por otra parte, a través de las propiedades de las funciones continuas en un intervalo se trabaja el razonamiento lógico, la negación de implicaciones y el uso de teoremas no constructivistas.

La **competencia digital** se integra a lo largo de la unidad haciendo partícipes a los alumnos de las ventajas que tiene recurrir a los medios informáticos.

Especial interés tienen las actividades propuestas con herramientas tecnológicas a lo largo de los epígrafes, así como las actividades interactivas del *test de autoevaluación* que se encuentra al final de la unidad.

A través de la incorporación del lenguaje matemático a la expresión habitual de los alumnos, se fomenta la **competencia en comunicación lingüística.** En esta unidad se presentan numerosos conceptos matemáticos que los alumnos han de utilizar correctamente a la hora de resolver actividades y problemas.

La **competencia aprender a aprender** se fomenta a través de la autonomía de los alumnos a la hora de resolver problemas. Es fundamental que el profesor incida en las destrezas necesarias para comunicar con eficacia los resultados de la resolución de cualquier actividad, reto o problema.

Las **competencias sociales y cívicas** se desarrollan en el área de Matemáticas mediante la aceptación de otros puntos de vista en la resolución de algunos problemas. Es importante que el docente trabaje situaciones que se pueden resolver de diferentes formas, utilizando los distintos métodos en el cálculo de límites, para trabajar con los alumnos la apertura conceptual de que no existe un único camino para llegar a la solución, sin olvidar que han de ser capaces de validar el método. El reconocimiento y valoración de las aportaciones ajenas enriquece el aprendizaje.

Temporalización

El tiempo previsto para el desarrollo de la unidad es de tres semanas, aunque deberá adaptarse a las necesidades de los alumnos.

Objetivos

Los objetivos que los alumnos tienen que alcanzar son:

- Comprender el concepto de límite de una función, tanto en un punto como en el infinito.
- Calcular límites e interpretarlos en la representación de funciones para determinar las asíntotas.
- Reconocer las diferentes discontinuidades en el estudio de funciones, y cómo solventar aquellas evitables.
- Conocer y saber aplicar las propiedades sobre funciones continuas en un intervalo que se exponen en la unidad.

Atención a la diversidad

Con el fin de atender los distintos ritmos de aprendizaje de los alumnos, se proponen algunas actividades de refuerzo y de ampliación que podrán utilizarse como alternativa o complemento a las que figuran en el libro del alumno.

PROGRAMACIÓN DE LA UNIDAD

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables	Competencias clave
Límite de una función en un punto Definición de límite Límites laterales en un punto Límite infinito en un punto. Asíntotas verticales	1. Comprender el concepto de límite de una función en un punto y utilizarlo para identificar asíntotas verticales.	1.1. Calcula el límite de una función en un punto a través del cálculo diferenciado de los límites laterales. 1.2. Reconoce las asíntotas verticales de una función y justifica su existencia.	CMCT CL CAA CSC
Límite de una función en el infinito	2. Utilizar los límites en el infinito para calcular y representar las asíntotas horizontales de una función.	2.1. Determina asíntotas horizontales en las funciones convergentes y reconoce las divergentes.	CMCT CL CAA
Cálculo de límites Límite de la suma, del producto y del cociente de funciones Límite de composición de funciones Límite de la función exponencial Límite de la función $f(x)$ elevada a otra función $g(x)$ Resumen de las principales reglas de cálculo con límites	3. Operar con límites así como calcular indeterminaciones apoyándose en diferentes métodos, como el uso de la función exponencial y logarítmica.	3.1. Conoce las reglas de la aritmética de límites. 3.2. Aplica los métodos basados en el uso de la función exponencial y logarítmica para el cálculo de indeterminaciones. 3.3. Realiza investigaciones utilizando programas informáticos específicos para seleccionar y estudiar situaciones nuevas del cálculo de límites.	CMCT CD CL CAA CSC
Continuidad de una función en un punto Función continua en un punto Propiedades derivadas de la continuidad en un punto Tipos de discontinuidades	4. Estudiar la continuidad de una función en un punto, aplicando los resultados que se derivan de ello.	4.1. Reconoce y diferencia distintos tipos de discontinuidades. 4.2. Analiza las funciones en un entorno de los puntos de discontinuidad. 4.3. Calcula el valor de uno o varios parámetros para lograr que funciones definidas a trozos sean continuas. 4.4. Realiza investigaciones utilizando programas informáticos específicos para seleccionar y estudiar situaciones nuevas del análisis de funciones relativas a la continuidad en un punto y en un intervalo.	CMCT CD CL CAA
Continuidad de una función en un intervalo Función continua en un intervalo			

MAPA DE CONTENIDOS DE LA UNIDAD

PARA EL PROFESOR

- **Actividades de refuerzo**
- **Actividades de ampliación**
- **Prueba de evaluación**

Contenidos

Presentación de la unidad
Repasa lo que sabes

1. Límite de una función en un punto
- Definición de límite
- Límites laterales en un punto
- Límite infinito en un punto. Asíntotas verticales

2. Límite de una función en el infinito

3. Cálculo de límites
- Límite de la suma, del producto y del cociente de funciones
- Límite de composición de funciones
- Límite de la función exponencial
- Límite de la función *f* (*x*) elevada a otra función *g*(*x*)
- Resumen de las principales reglas de cálculo con límites

4. Continuidad de una función en un punto
- Función continua en un punto
- Propiedades derivadas de la continuidad en un punto
- Tipos de discontinuidades

5. Continuidad de una función en un intervalo
- Función continua en un intervalo

EJERCICIOS RESUELTOS

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

EVALUACIÓN

PARA EL ALUMNO

- **Vídeo.** Límite de indeterminación
- **Vídeo.** Continuidad con parámetros
- **Vídeo.** Discontinuidad
- **Actividades interactivas.** Test de autoevaluación

Repasa lo que sabes (página 115)

1. Calcula el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{5x+1}$ ***b)*** $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ ***c)*** $f(x) = \sqrt{2-\sqrt{4-x^2}}$ ***d)*** $g(x) = \dfrac{1}{1-e^{1/x}}$

a) Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{-1/5\}$

b) Dom $f(x) = (-1, 0) \cup (0, +\infty)$

c) Dom $f(x) = [-2, 2]$

d) Dom $g(x) = \mathbb{R} - \{0\}$

2. Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ y $g(x) = 3 - \dfrac{1}{x}$ averigua:

a) $(f+g)(x)$ ***b)*** $(f-g)(x)$ ***c)*** $(f \cdot g)(x)$ ***d)*** $(f/g)(x)$

a) $(f+g)(x) = \dfrac{1}{x^2-1} + 3 - \dfrac{1}{x}$

b) $(f-g)(x) = \dfrac{1}{x^2-1} - 3 + \dfrac{1}{x}$

c) $(f \cdot g)(x) = \dfrac{3x-1}{x \cdot (x^2-1)}$

d) $(f/g)(x) = \dfrac{x}{(3x-1) \cdot (x^2-1)}$

3. Si $f(x) = x^4 - 2x^2$ y $g(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$, calcula las funciones compuestas de $f \circ g$ y $g \circ f$, así como sus respectivos dominios.

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}}\right) = \left(\sqrt{\dfrac{1}{x}}\right)^4 - 2\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}}\right)^2 = \dfrac{1-2x}{x^2}$. A la hora de estudiar el dominio de la función, hay que tener en cuenta que $g(x)$ tan solo admite valores mayores que cero.

  Aparentemente $(f \circ g)(-1) = \dfrac{1-2-1}{-1^2} = 3$, sin embargo la función f no devolverá valor alguno si no recibe un valor real, como sucede en el caso de $x < 0$, por ejemplo: $(f \circ g)(-1) = f\left(\sqrt{-1}\right) = ?$. Así pues: Dom $(f \circ g)(x) = (0, +\infty)$.

- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 2x^2) = \sqrt{\dfrac{1}{x^4 - x^2}}$. En este caso, $f(x)$ admite cualquier valor real, y devuelve siempre un valor positivo o nulo.

  Solo aquellos valores de x que anulen $f(x)$ estarán fuera del dominio, esto es: Dom $(g \circ f)(x) = \mathbb{R} - \left\{0, \pm\sqrt{2}\right\}$

4. Calcula, si es posible, la función inversa respecto de la composición de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1-5x}{6}$ ***b)*** $f(x) = -3x^2 + 27$ ***c)*** $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$ ***d)*** $f(x) = \ln(x^2 - 4)$

a) $f^{-1}(x) = \dfrac{1-6x}{5}$

b) $f^{-1}_{x \geq 0}(x) = \sqrt{9 - x/3}$

$f^{-1}_{x < 0}(x) = -\sqrt{9 - x/3}$

c) $f(x) = x^3 + 2$

d) $f^{-1}_{x \geq 0}(x) = \sqrt{e^x + 4}$

$f^{-1}_{x < 0}(x) = -\sqrt{e^x + 4}$

En los apartados ***b)***, ***d)*** no existe una función inversa como tal (pues las funciones originales no son inyectivas), pero se puede calcular la función inversa de las restricciones indicadas. Necesitamos en ambos casos dos funciones inversas para las diferentes partes de la función original, que por otra parte son simétricas.

5. Estudia la simetría de estas funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$ ***b)*** $f(x) = \dfrac{x(x^2+1)}{2x^2-4}$

a) $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{x^2}{x^2-1} = f(x)$, se trata por tanto de una función simétrica par.

b) $f(-x) = \dfrac{(-x)((-x)^2+1)}{2(-x)^2-4} = \dfrac{x(x^2+1)}{2x^2-4} = -f(x)$, luego es una función simétrica impar.

Sugerencias didácticas. Recursos TIC

Límite e indeterminación (página 126)

En el vídeo puede verse cómo se indica la indeterminación de 1^{∞} y cómo se calcula, paso a paso, el valor del límite aplicando las propiedades de las operaciones.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital un ejercicio de este tipo de indeterminación o para que los alumnos puedan repasar este procedimiento más tarde.

Continuidad con parámetros (página 131)

En el vídeo se muestra el estudio de la continuidad de la función a trozos del ejercicio resuelto según el valor de *a,* indicando su dominio y calculando el límite de la función para $x = 1$ (resolviendo las indeterminaciones correspondientes).

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital un ejercicio de este tipo en el que se especifican las condiciones de continuidad o para que los alumnos puedan repasar el procedimiento a seguir más tarde.

Discontinuidades (página 137)

En el vídeo se muestra la resolución del ejercicio resuelto 8. Tras indicar los fallos en el dominio, se estudia el tipo de discontinuidad que se da en cada uno de ellos, resolviendo los límites laterales correspondientes.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital un ejemplo completo de este tipo de ejercicios o para que los alumnos puedan repasar el procedimiento utilizado más tarde.

Actividades (páginas 120/133)

1 **Determina, si existe, el límite en $x = 2$ de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < 2 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (3 - x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x-1)^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = 1$$

2 **Calcula, si existe, el límite en $x = 0$ de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 0} f(x)$$

3 **Escribe la ecuación de la asíntota vertical de la función propuesta en el ejercicio anterior.**

La asíntota vertical es $x = 0$.

4 **Dada la función $f(x) = \dfrac{3 - x}{(x-1)^2}$, calcula $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.**

$$\lim_{x \to 0} \frac{3 - x}{(x-1)^2} = 3 \qquad \lim_{x \to 1} \frac{3 - x}{(x-1)^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

5 **Calcula: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 + |x|}$**

$$\text{Dado que } \frac{1}{1 + |x|} = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{1 + x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

6 **Determina los límites laterales de la función $f(x) = \dfrac{|x + 1|}{x + 1}$ en $x = -1$.**

$$\text{Dado que } \frac{|x + 1|}{x + 1} = \begin{cases} \dfrac{-x - 1}{x + 1} = -1 & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{x + 1}{x + 1} = 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} f(-1) = -1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} 1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to -1} f(x)$$

7 **Calcula, si las hay, las asíntotas verticales de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ ***c)*** $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ ***d)*** $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$, asíntotas verticales $x = 1$ y $x = -1$.

b) Dom $f = \mathbb{R}$, no tiene asíntotas verticales.

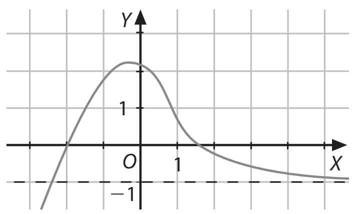
c) Dom $f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

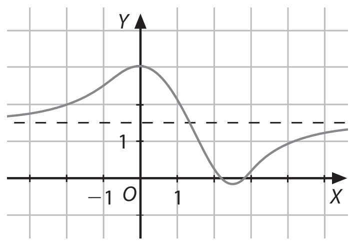
$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \dfrac{-1}{2}$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$, asíntota vertical $x = 1$.

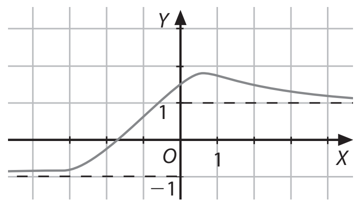
d) Dom $f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$, asíntota vertical en $x = 1$.

8 **Indica las asíntotas horizontales de las funciones de las figuras.**







a) Por la derecha: $y = -1$

b) $y = 1{,}5$

c) Por la izquierda: $y = -1$, por la derecha: $y = 1$

9 Halla las ecuaciones de las asíntotas horizontales de estas funciones.

a) $f(x)=\dfrac{1-2x^2}{x^2-1}$ *d)* $f(x)=\dfrac{1}{1-|x|}$

b) $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x+1}$ *e)* $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$

c) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^3}$ *f)* $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+2}$

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-2$, asíntota horizontal $y=-2$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\dfrac{3}{2}$, asíntota horizontal $y=\dfrac{3}{2}$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, asíntota horizontal $y=0$.

d) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, asíntota horizontal $y=0$.

e) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$, asíntota horizontal $y=1$, tanto si x tiende a $+\infty$ o a $-\infty$, atención $\text{Dom } f=(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$.

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, asíntota horizontal por la izquierda $y=-1$, por la derecha $y=1$.

10 Construye gráficas que cumplan las siguientes condiciones.

a) **Dom $f=\mathbb{R}$, Rec $f=[-1,+\infty)$**

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3,\ \lim\limits_{x\to+\infty}=+\infty,\ f(3)=3,\ \lim\limits_{x\to3} f(x)=2,\ f^{-1}(0)=\{0,2\}$

b) **Dom $f=\mathbb{R}-\{0,2\}$, Rec $f=(-\infty,0)\cup\{1\}\cup(3,+\infty)$**

$\lim\limits_{x\to0} f(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to2^-} f(x)=3,\ \lim\limits_{x\to2^+} f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0,$

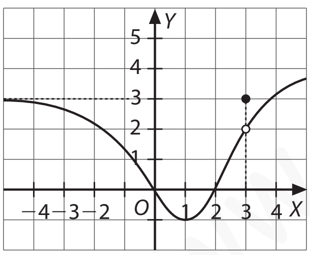
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

(Ten en cuenta que $f(x)<0$ si $x<0$ y que $f(x)>0$ si $x>0$.)

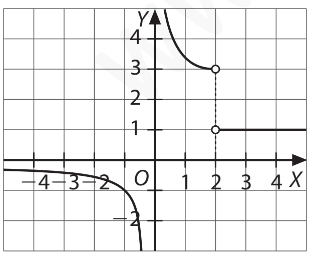
c) **Dom $f=\mathbb{R}$, Rec $f=\mathbb{R}$**

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to0^+} f(x)=3,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

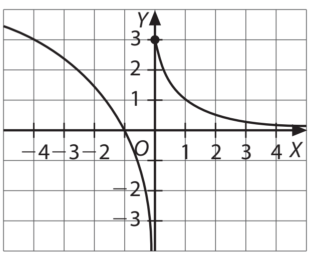
a)



b)



c)



11 Resuelve cada uno de los límites siguientes por el método que consideres más adecuado.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2/x}$ *d)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+5x}-x$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-2x}-(x-2)}{x-2}$ *e)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{\sqrt{x^2+5x}-x}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{3x^2+1}{5x^2-2}\right)^{\frac{x-1}{2}}$ *f)* $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x}{\sqrt{1-x}-1}$

g) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ *m)* $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{(2x-6)^2}{\sqrt{2x}-\sqrt{6}}$

h) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3-1}{x-1}$ *n)* $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{2x-6}{\sqrt{2x}-\sqrt{6}}$

i) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2}}{x^2+x-2}$ *ñ)* $\lim\limits_{x\to1/2} e^{\frac{1}{2x-1}}$

j) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1-x\sqrt{x}}{1-x^2}$ *o)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x}+3x}{2^x}$

k) $\lim\limits_{x\to1/2} \dfrac{\ln(4x-1)}{2x-1}$ *p)* $\lim\limits_{x\to0} \left(1+\dfrac{x^2-1}{3}\right)^{\frac{1}{x+1}}$

l) $\lim\limits_{x\to0} (2x+1)^{1/x}$ *q)* $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(2x^2+1)}{2x}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2/x}=L\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x}\ln x=\ln L\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\ln x}{x}=0=\ln L$

$\Rightarrow L=e^0=1$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-2x}-(x-2)}{x-2}=\left(\dfrac{\infty-\infty}{\infty}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2x-(x-2)^2}{(x-2)\left(\sqrt{x^2-2x}+(x-2)\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{2x}=0$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{3x^2+1}{5x^2-2}\right)^{\frac{x-1}{2}}=\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-\infty}=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+5x}-x=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+5x-x^2}{\sqrt{2x^2+5x}+x}=$

$=\dfrac{5}{1+\sqrt{2}}=5\sqrt{2}-5$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{\sqrt{x^2+5x}-x}=1^{5/2}=1$

f) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x}{\sqrt{1-x}-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x\left(\sqrt{1-x}+1\right)}{(1-x)-1}=-2$

g) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x+2-4}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\dfrac{1}{4}$

h) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3-1}{x-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to1} \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=3$

i) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2}}{x^2+x-2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

j) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1-x\sqrt{x}}{1-x^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1-x^3}{(1-x^2)\left(1+x\sqrt{x}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to1} \dfrac{(x-1)(-x^2-x-1)}{(1+x)(1-x)\left(1+x\sqrt{x}\right)}=\dfrac{3}{4}$

k) $\lim\limits_{x\to1/2} \dfrac{\ln(4x-1)}{2x-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to1/2} \ln(4x-1)^{\frac{1}{2x-1}}=$

$=\ln \lim\limits_{x\to1/2} (4x-1)^{\frac{1}{2x-1}}=\ln(1^{\infty})=$

$=\ln \lim\limits_{x\to1/2} \left(1+\dfrac{1}{\dfrac{1}{4x-2}}\right)^{\frac{1}{4x-2}\cdot\frac{4x-2}{2x-1}}=\ln e^2=2$

l) $\lim\limits_{x\to0}(2x+1)^{1/x} = (1^{\infty}) = \lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{1}{2x}}\right)^{\frac{2}{2x}} = e^2$

m) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(2x-6)^2}{\sqrt{2x}-\sqrt{6}} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to3}\dfrac{(2x-6)^2\left(\sqrt{2x}+\sqrt{6}\right)}{2x-6} = 0$

n) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(2x-6)}{\sqrt{2x}-\sqrt{6}} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to3}\dfrac{(2x-6)\left(\sqrt{2x}+\sqrt{6}\right)}{2x-6} = 2\sqrt{6}$

ñ) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1/2^-} e^{\frac{1}{2x-1}} = 0\\[2mm] \lim\limits_{x\to1/2^+} e^{\frac{1}{2x-1}} = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to1/2^-} e^{\frac{1}{2x-1}}$

o) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{3x}+3x}{2^x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^3}{2}\right)^x = +\infty$

p) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{x^2-1}{3}\right)^{\frac{1}{x+1}} = \lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{3}{x^2-1}}\right)^{\frac{1}{\frac{3}{x^2-1}\cdot\frac{x^2-1}{3(x+1)}}} =$

$= \lim\limits_{x\to0} e^{\frac{x-1}{3}} = e^{-\frac{1}{3}}$

q) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(2x^2+1)}{2x} = \lim\limits_{x\to0}\ln(2x^2+1)^{1/2x} =$

$= \ln\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{1}{1/2x^2}\right)^{x/2x^2} = \ln\lim\limits_{x\to0} e^x = \ln 1 = 0$

12 **Estudia la continuidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican.**

a) $f(x) = E(x)$, **en** $x = \dfrac{2}{3}$ **y en** $x = 1$.

b) $f(x) = \dfrac{2-x}{x^2-2x}$, **en** $x = 0$ **y en** $x = 2$.

c) $f(x) = 4 - \ln x$, **en** $x = 0$ **y en** $x = 4$.

d) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$, **en** $x = 1$.

a) En $x = \dfrac{2}{3}$ es continua; en $x = 1$ no es continua, porque los límites laterales son distintos.

b) En $x = 0$ y en $x = 2$ no existe imagen.

c) En $x = 0$ no es continua, en $x = 4$ es continua.

d) No es continua, puesto que no está definida en $x = 1$.

13 **Indica en qué casos es posible salvar la discontinuidad en las funciones de la actividad anterior.**

En ***b)*** se puede salvar la discontinuidad en el punto $x = 2$ imponiendo: $f(2) = \lim\limits_{x\to2} f(x) = -1/2$

En ***d)*** si: $f(1) = \lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \dfrac{2}{3}$

14 **Estudia la continuidad de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{3x^2-x}{x^3-1}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 0\\ x^2+1 & \text{si } x \geq 0\end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < -1\\[2mm] \dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2} & \text{si } x \geq -1\end{cases}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{2-x}}{x}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{1/x}}$

f) $f(x) = \dfrac{\ln(1-x^2)}{(x-2)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)}$

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{1\}$. Dado que es racional, es continua en su dominio.

b) Dom $f = \mathbb{R}$. La función es continua en $x < 0$ y en $x > 0$. Además: $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to0} f(x) = 1 = f(0)$, luego la función es continua en $\mathbb{R}$.

c) Dom $f = \mathbb{R}$. La función es continua en $x < -1$ y en $x > -1$. Además: $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -1$; $\lim\limits_{x\to-1^+}(x) = 0 \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to-1} f(x)$, luego la función es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

d) Dom $f = (-\infty, 0) \cup (0, 2)$. La función es continua en su dominio.

e) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$. La función es continua en su dominio.

f) Dom $f = (-1, -1/2) \cup (-1/2, 1)$. La función es continua en su dominio.

15 **Estudia para qué valores de *a* son continuas en $\mathbb{R}$ estas funciones.**

a) $f(x) = \begin{cases} ax^3 - 3x^2 + ax + 2 & \text{si } x <\\ (1-a)x^2 & \text{si } x \geq -1\end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+|x|}{1-x} & \text{si } x < -1\\ a & \text{si } x = -1\\ \dfrac{-2+2\sqrt{x+2}}{x+1} & \text{si } x > -1\end{cases}$

c) $f(x) \begin{cases} 1 + a^x & \text{si } x \leq 0\\ \ln(x^2+a) & \text{si } x > 0\ (a > 0)\end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)^2-1}{x} & \text{si } x \neq 0\\ a & \text{si } x = 0\end{cases}$

a) En $\mathbb{R} - \{-1\}$, la función es continua. Estudiamos qué sucede en $x = -1$: $f(-1) = 2 - a$

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -2a - 1$; $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = 2 - a$, para que la función sea continua los límites laterales deben coincidir, luego $a = -3$.

b) En realidad la función se puede escribir como:

$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1\\ a & \text{si } x = -1\\ \dfrac{-2+2\sqrt{x+2}}{x+1} & \text{si } x > -1\end{cases}$

$f(-1) = a$, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{4(x+2)-4}{(x+1)\left(2\sqrt{x+2}+2\right)} = 1$

Luego $a = 1$

c) $f(0) = 2$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \ln a$. Para que $f(x)$ sea continua, debe ser $a = e^2$.

d) $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to0}(2x+2) = 2$, luego para que la función sea continua, $a = 2$.

16 **Clasifica las discontinuidades de la función.**

$$f(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$$

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x^2+x} = \dfrac{x-1}{x+1} & \text{si } x < 0\\[2mm] \dfrac{x^2+x}{x^2-x} = \dfrac{x+1}{x-1} & \text{si } x > 0\end{cases}$

$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

En $x = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1$, discontinuidad evitable en $x = 0$.

En $x = -1$, $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \infty$, discontinuidad asintótica en $x = -1$.

En $x = 1$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$, discontinuidad asintótica en $x = 1$.

17 **Clasifica las discontinuidades de las funciones de la actividad 14 de la página 131. Cuando la discontinuidad sea evitable, calcula el valor que debe asignarse a la función para salvar la discontinuidad.**

a) En $x = 1$, discontinuidad asintótica.

b) No hay discontinuidades.

c) En $x = -1$, discontinuidad de salto.

d) En $x = 0$, discontinuidad evitable: si $f(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$, f es continua en $(-\infty, 2)$.

e) En $x = 0$, discontinuidad de salto.

f) En $x = 1$ y $x = -1$, discontinuidad asintótica y esencial. En $x = -1/2$, discontinuid asintótica.

18 **Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x - b}{2x^3 - ax - 2x}$ averigua a y b sabiendo que en $x = 2$ la función presenta una discontinuidad evitable. A continuación, calcula y clasifica las demás discontinuidades.**

Si la discontinuidad es evitable en $x = 2$, entonces el límite de la función cuando x tiende a 2 es del tipo $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

$2^2 - 2 - b = 0 \Rightarrow b = 2$

$2 \cdot 2^3 - a \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = 0 \Rightarrow a = 3$

$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \left\{0, 2, -\dfrac{1}{2}\right\}$

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{2x^3 - 3x^2 - 2x} = \dfrac{(x-2)(x+1)}{2x(x-2)(x+1/2)} = \dfrac{3}{10}$, como ya se ha dicho, discontinuidad evitable en $x = 2$.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x-2)(x+1)}{2x(x-2)(x+1/2)} = \infty$, en $x = 0$, discontinuidad asintótica.

$\lim\limits_{x \to -1/2} \dfrac{(x-2)(x+1)}{2x(x-2)(x+1/2)} = \infty$, en $x = -\dfrac{1}{2}$, discontinuidad asintótica.

Ejercicios y problemas (páginas 138/140)

Cálculo de límites

1 **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2}{x^2 + 5}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$

c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{2x^2 - 2x - 4}$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x - 1}{(x - 2)^2}$

e) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x + 1}{x + 2}$

f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-x^2 - x + 6}{(x - 2)^2 x}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 - x}{x^3}$

h) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x - 2)^2}{x^2 - 4}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2}{x^2 + 5} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} =$

$= \lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 2x + 4) = 12$

c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{2x^2 - 2x - 4} = \left(\dfrac{0}{0}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x+1)(x^2 + 2x - 3)}{(x+1)(2x - 4)} = \dfrac{2}{3}$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x - 1}{(x - 2)^2} = \dfrac{5}{0^+} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x + 1}{x + 2} = \left(\dfrac{-3}{0}\right) =$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{2x+1}{x+2} = \dfrac{-3}{0^-} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{2x+1}{x+2} = \dfrac{-3}{0^+} = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x+1}{x+2} = \infty$$

f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-x^2 - x + 6}{(x-2)^2 x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(-x-3)}{(x-2)^2 x} =$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-x - 3}{(x-2)x} = \dfrac{-5}{0} =$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{-x-3}{(x-2)x} = \dfrac{-5}{0^-} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{-x-3}{(x-2)x} = \dfrac{-5}{0^+} = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-x^2 - x + 6}{(x-2)^2 x} = \infty$$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 - x}{x^3} = \left(\dfrac{2}{0}\right) =$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{2-x}{x^3} = \dfrac{2}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2-x}{x^3} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2-x}{x^3} = \infty$$

h) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)^2}{x^2 - 4} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{x+2} = \dfrac{0}{4} = 0$

2 **Halla los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{x+2}{x-2} - \dfrac{6x+4}{x^2-4}\right)$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x+3}{x-1} \cdot \dfrac{x^2+x-2}{x^2-3}\right)$

c) $\lim\limits_{x \to 1/2} \left(\dfrac{2x+1}{2x+2}\right)^{\frac{2x-1}{\sqrt{2x-1}}}$

d) $\lim\limits_{x \to 1/3} \left(\dfrac{2}{1-x}\right)^{\frac{x}{3x-1}}$

a) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{x+2}{x-2} - \dfrac{6x+4}{x^2-4}\right) = (\infty - \infty) =$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 4x + 4 - 6x - 4}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x+3}{x-1} \cdot \dfrac{x^2+x-2}{x^2-3}\right) = (\infty \cdot 0) =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x+3)(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2-3)} = -6$

c) $\lim\limits_{x \to 1/2} \left(\dfrac{2x+1}{2x+2}\right)^{\frac{2x-1}{\sqrt{2x-1}}} = \left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{0}{0}}\right] = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\lim\limits_{x \to 1/2} \sqrt{2x-1}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^0 = 1$

d) $\lim\limits_{x \to 1/3} \left(\dfrac{2}{1-x}\right)^{\frac{x}{3x-1}} = (3^\infty) = \begin{cases} 3^{\lim\limits_{x \to 1/3^-} \frac{x}{3x-1}} = 3^{-\infty} = 0 \\ 3^{\lim\limits_{x \to 1/3^+} \frac{x}{3x-1}} = 3^{+\infty} = +\infty \end{cases}$

$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to 1/3} f(x)$

3 **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{1 - \sqrt{x+1}}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{2x}$

d) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^2 - 4x - 6}{3 - \sqrt{6+x}}$

e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x - \sqrt{x}}}$

c) $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{3x+3}{\sqrt{5x^2+x}}$ *f)* $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{1-\sqrt{x+1}} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(1+\sqrt{x+1})}{1-(x+1)} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} (-1-\sqrt{x+1}) = -2$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{2x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+4-4}{2x(\sqrt{x+4}+2)} = \dfrac{1}{8}$

c) $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{3x+3}{\sqrt{5x^2+x}} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^2-4x-6}{3-\sqrt{6+x}} = \left(\dfrac{0}{0}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2(x+1)(x-3)(3+\sqrt{6+x})}{(3-\sqrt{6+x})(3+\sqrt{6+x})} =$

$= \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2(x+1)(x-3)(3+\sqrt{6+x})}{3-x} =$

$= \lim\limits_{x \to 3} [-2(x+1)(3+\sqrt{6+x})] = -48$

e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-\sqrt{x}}} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}}{\dfrac{\sqrt{x-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}} = \lim\limits_{x \to 1} \sqrt{1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{(x+1)(x-1)} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{(x+1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \dfrac{1}{4}$

4 **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3+x^2-x+1)$ ***e)*** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+4x}}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^3+x^2-x+1)$ ***f)*** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+4x}}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{4-x^2}$ ***g)*** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{\sqrt{2x^4+3}}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3-x^2+x-2}{x^4-x^2}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3+x^2-x+1) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^3+x^2-x+1) = +\infty$

c) $\nexists \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{4-x^2}$, puesto que Dom $f = [-2, 2]$.

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3-x^2+x-2}{x^4-x^2} = 0$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+4x}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\sqrt{2}}{x} = \sqrt{2}$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+4x}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2-4x}}{-x} = -\sqrt{2}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{\sqrt{2x^4+3}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

5 **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{4x^2+1}-(2x+1)\right]$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\sqrt{4x^2+1}-(2x+1)\right]$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^2+1}{x^2+x}\right)^{\sqrt{x^2+1}-x}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{2x^2+1}{x^2+x}\right)^{\sqrt{x^2+1}-x}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+2x-1}-x\right)$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+2x-1}-x\right)$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{x}$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{x}$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{x}\right)$

j) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x+\sqrt{2+x}}{x+1}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{4x^2+1}-(2x+1)\right] = (\infty-\infty) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2+1-(4x^2+4x+1)}{\sqrt{4x^2+1}+(2x+1)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-4x}{2x+2x} = -1$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\sqrt{4x^2+1}-(2x+1)\right] = \infty+\infty = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^2+1}{x^2+x}\right)^{\sqrt{x^2+1}-x} = 2^{(\infty-\infty)}$

Resolvemos la indeterminación del exponente:

$\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+1}-x) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2x} = 0$

En consecuencia:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^2+1}{x^2+x}\right)^{\sqrt{x^2+1}-x} = 2^0 = 1$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{2x^2+1}{x^2+x}\right)^{\sqrt{x^2+1}-x} = 2^{\infty+\infty} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+2x-1}-x) = (\infty-\infty) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+2x-1-x^2}{\sqrt{x^2+2x-1}+x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{2x} = 1$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2+2x-1}-x) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2-2x-1}+x) = \infty+\infty = +\infty$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{x} = \left(\dfrac{\infty-\infty}{\infty}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})} = \left(\dfrac{2}{\infty}\right) = 0$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{x} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{-x} = \left(\dfrac{2}{-\infty}\right) = 0$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{x}\right) = (\infty-\infty) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{2x+x^2}-x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+x^2-x^2}{\sqrt{2x+x^2}+x} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{2x} = 1$

j) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x+\sqrt{2+x}}{x+1} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-(2+x)}{(x+1)(x-\sqrt{2+x})} =$

$= \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-\sqrt{2+x})} = \dfrac{-3}{-2} = \dfrac{3}{2}$

6 **Estudia el comportamiento de la siguiente función en los extremos de su dominio: $f(x) = |2 - 2^x|$**

$$f(x) = |2 - 2^x| = \begin{cases} 2 - 2^x & \text{si } x < 1 \\ 2^x - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (2 - 2^x) = 2 - 2^{-\infty} = 2 - 0 = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (2^x - 2) = 2^{+\infty} - 2 = +\infty - 2 = +\infty$$

Hay una asíntota horizontal por la izquierda, $y = 2$.

7 **Calcula los límites cuando $x \to -1$ y $x \to 0$ de la siguiente función y encuentra sus asíntotas.**

$$f(x) = \frac{x^2 + |x|}{|x^2 + x|}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + |x|}{|x^2 + x|} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 + x} = \dfrac{x - 1}{x + 1} & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{x^2 - x}{-x^2 - x} = -\dfrac{x - 1}{x + 1} & \text{si } -1 < x < 0 \\ \dfrac{x^2 + x}{x^2 + x} = 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Dom $f = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{x - 1}{x + 1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty \\ &\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x - 1}{-x - 1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$$

Por tanto, $x = -1$ es una asíntota vertical.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x - 1}{-x - 1} = \frac{-1}{-1} = 1 \\ &\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

Por tanto, en $x = 0$ no hay una asíntota vertical; aunque no existe la imagen, sí existe el límite, es una discontinuidad evitable.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x - 1}{x + 1} = 1 \\ &\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} f(x) = 1$$

Por consiguiente, $y = 1$ es una asíntota horizontal.

8 **Calcula los límites siguientes.**

a) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \left(\frac{4x - 5}{x + 1}\right)^{\frac{x^2 - 1}{(x - 2)^2}}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2}\right)^{\sqrt{2x^2 + 1} - x}$

c) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x} - \frac{x^3 - x^2 - x + 2}{x^2}\right)^{\frac{3 - x^2}{x}}$

a) $$\lim_{x \to 2} \left(\frac{4x - 5}{x + 1}\right)^{\frac{x^2 - 1}{(x - 2)^2}} = (1^\infty) = e^{\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{4x - 5}{x + 1} - 1\right)\frac{x^2 - 1}{(x - 2)^2}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to 2} \frac{3(x - 2)(x + 1)(x - 1)}{(x + 1)(x - 2)^2}} = e^{\lim\limits_{x \to 2} \frac{3(x - 1)}{x - 2}} =$$

$$= \left\{\begin{aligned} &e^{\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{3(x - 1)}{x - 2}} = e^{\frac{3}{0^-}} = e^{-\infty} = 0 \\ &e^{\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{3(x - 1)}{x - 2}} = e^{\frac{3}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty \end{aligned}\right. \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 2} f(x)$$

b) $$\lim_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2}\right)^{\sqrt{2x^2 + 1} - x} = 1^{(\infty - \infty)}$$

Resolvemos la indeterminación del exponente:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2x^2 + 1} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} x(\sqrt{2} - 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2}\right)^{\sqrt{2x^2 + 1} - x} = (1^\infty) =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} - 1\right) \cdot (\sqrt{2x^2 + 1} - x)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-3(\sqrt{2x^2 + 1} - x)}{x^2 - 2}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-3(\sqrt{2} + 1)x}{x^2 - 2}} = e^0 = 1$$

c) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x} - \frac{x^3 - x^2 - x + 2}{x^2}\right)^{\frac{3 - x^2}{x}} =$$

$$= [(\infty - \infty)^{-\infty}] = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 2}{x^2}\right)^{\frac{3 - x^2}{x}} = (1^{-\infty}) =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 2}{x^2} - 1\right)\left(\frac{3 - x^2}{x}\right)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(2x - 2)(3 - x^2)}{x^3}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2x^3}{x^3}} = e^{-2}$$

9 **Calcula el valor de *a* para que se verifiquen las siguientes igualdades.**

a) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{3ax^3 - 2ax^2 + ax - 1}{x^2 - 6x^3} = 1$

b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2x^2 + ax} - \sqrt{2x^2 + 1}\right) = \sqrt{2}$

c) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + ax + 2}{x^2 - 2x}\right)^{\frac{3x^2 - 1}{x}} = \frac{1}{e^3}$

a) $$\lim_{x \to -\infty} \frac{3ax^3 - 2ax^2 + ax - 1}{x^2 - 6x^3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{3ax^3}{-6x^3} =$$

$$= \frac{3a}{-6} = 1 \Rightarrow a = -2$$

b) $$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{2x^2 + ax} - \sqrt{2x^2 + 1}) = (\infty - \infty) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + ax - (2x^2 + 1)}{\sqrt{2x^2 + ax} + \sqrt{2x^2 + 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ax - 1}{2\sqrt{2}x} =$$

$$= \frac{a}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow a = 4$$

c) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + ax + 2}{x^2 - 2x}\right)^{\frac{3x^2 - 1}{x}} = (1^\infty) =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + ax + 2}{x^2 - 2x} - 1\right)\left(\frac{3x^2 - 1}{x}\right)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3(a + 2)x^3}{2x^3}} =$$

$$= e^{3(a + 2)} = e^{-3} \Rightarrow a = -3$$

Continuidad de una función en un punto

10 **Estudia la continuidad de las siguientes funciones y clasifica sus discontinuidades.**

a) $f(x) = \ln|x + 1|$

b) $f(x) = \dfrac{x + 1}{2x^2 + x - 1}$

c) $f(x) = \dfrac{|2x + 1|}{2x^2 - x - 1}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x - 2} + \dfrac{1}{x + 3}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^x}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{1 - e^x}$

g) $f(x) = \dfrac{\ln(1 + x)}{x}$

h) $f(x) = \log(1 - x^2)$

i) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{2x^2(x + 1)}$

j) $f(x) = \dfrac{2^{1/x}}{1 + x}$

k) $f(x) = \dfrac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}$

l) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

m) $f(x) = \dfrac{|x| - 1}{x^2 - |x|}$

n) $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x^2 + 2}}}{x^2 - 1}$

a) La función es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$, puesto que $\ln x$ es una función continua en $(0, +\infty)$ y $|x + 1|$ toma valores positivos excepto para $x = -1$, en que se anula. La discontinuidad en $x = -1$ es asintótica.

b) La función es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1/2\}$, puesto que es un cociente de funciones continuas cuyo denominador se anula en $x = -1$ y $x = 1/2$. Para clasificar la discontinuidad que presenta en estos puntos, se calcula su límite en ellos.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{2x^2+x-1} = \lim_{x \to -1} \frac{x+1}{(x+1)(2x-1)} =$$
$$= \lim_{x \to -1} \frac{1}{2x-1} = -\frac{1}{3}$$

Por consiguiente, en $x = -1$, la discontinuidad es evitable.

$$\lim_{x \to 1/2} \frac{x+1}{2x^2+x-1} = \lim_{x \to 1/2} \frac{1}{2x-1} = \left(\frac{1}{0}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1/2^-} \dfrac{1}{2x-1} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1/2^+} \dfrac{1}{2x-1} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 1/2} \frac{x+1}{2x^2+x-1} = \infty$$

En consecuencia, en $x = 1/2$, la discontinuidad es asintótica.

c) La función es continua en $\mathbb{R} - \{-1/2, 1\}$, por ser una función racional cuyo denominador se anula en $x = -1/2$ y $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x-1} & \text{si } x < -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x > -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1/2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1/2^-} -\dfrac{1}{x-1} = \dfrac{2}{3} \\ \lim\limits_{x \to -1/2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1/2^+} \dfrac{1}{x-1} = -\dfrac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to -1/2} f(x)$$

Por tanto, en $x = -1/2$, la función presenta una discontinuidad de salto.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = \infty$$

Por tanto, en $x = 1$, la función presenta una discontinuidad asintótica.

d) La función es continua en $\mathbb{R} - \{2, -3\}$, por ser una suma de funciones racionales continuas en su dominio, $\mathbb{R} - \{2\}$ y $\mathbb{R} - \{-3\}$, respectivamente. La discontinuidad es asintótica en ambos puntos:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} \left(\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x+3}\right) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{2x+1}{(x-2)(x+3)} = \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \left(\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x+3}\right) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{2x+1}{(x-2)(x+3)} = \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} = \dfrac{5}{0^- \cdot 5} = -\infty \\ = \dfrac{5}{0^+ \cdot 5} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3}\right) = \infty$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3^-} \left(\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x+3}\right) = \lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{2x+1}{(x-2)(x+3)} = \\ \lim\limits_{x \to -3^+} \left(\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x+3}\right) = \lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{2x+1}{(x-2)(x+3)} = \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} = \dfrac{-5}{-5 \cdot 0^-} = -\infty \\ = \dfrac{-5}{-5 \cdot 0^+} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to -3} \left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3}\right) = \infty$$

e) La función es continua en $\mathbb{R}$, por ser un cociente de funciones continuas en $\mathbb{R}$, cuyo denominador no se anula para ningún valor real.

f) La función es continua en su dominio, esto es, $\mathbb{R} - \{0\}$, por ser un cociente de funciones continuas, cuyo denominador se anula en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{1-e^x} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{1-e^x} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1}{1-e^x} = \infty$$

Por tanto, en $x = 0$, la función presenta una discontinuidad asintótica.

g) La función es continua en su dominio, o lo que es lo mismo, en $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$, por ser un cociente de funciones continuas.

A la izquierda de $x = -1$, la función no está definida, por lo que el límite lateral izquierdo no existe. Calculamos el límite lateral por la derecha: $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = +\infty$

Por tanto, la recta $x = -1$ es una asíntota vertical.

Calculamos el límite en $x = 0$: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{1}{1/x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \ln e = 1$$

Por tanto, en $x = 0$, la función presenta una discontinuidad evitable.

h) La función es continua en el intervalo $(-1, 1)$, es decir, donde está definida ya que el argumento del logaritmo tiene que ser positivo, y en este caso se trata de una función cuadrática que solo es positiva en el citado intervalo. En $x = -1$ y a su izquierda la función no está definida y $\lim\limits_{x \to 1^+} \log(1-x^2) = -\infty$, por lo tanto se tiene una discontinuidad asintótica y esencial en ese valor. En $x = 1$ la situación es análoga pero simétrica.

i) Puesto que es una función racional, es continua en su dominio: $\mathbb{R} - \{0, -1\}$.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \infty$

Por tanto, en $x = 0$ y en $x = -1$ la función diverge, por lo que en ambos puntos la discontinuidad es asintótica.

j) El numerador es una función continua en $\mathbb{R} - \{0\}$, y el denominador es una función continua en $\mathbb{R}$ que se anula en $x = -1$, por lo que la función es continua en $\mathbb{R} - \{0, -1\}$.

Calculamos el límite en cada punto, si existe.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{2^{1/x}}{1+x} = \dfrac{2^{-\infty}}{1} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2^{1/x}}{1+x} = \dfrac{2^{+\infty}}{1} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 0} f(x)$$

En $x = 0$, el límite no existe, y la función presenta una discontinuidad esencial, asintótica por la derecha.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{2^{1/x}}{1+x} = \dfrac{2^{-1}}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{2^{1/x}}{1+x} = \dfrac{2^{-1}}{0^+} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to -1} f(x) = \infty$$

En $x = -1$, la discontinuidad es asintótica.

k) La función es un cociente de funciones continuas, cuyo denominador se anula en $x = 0$. Calculamos el límite en este punto, si existe:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}} = \dfrac{2}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = \infty$$

En $x = 0$, la función presenta una discontinuidad asintótica.

l) Esta función es continua en $(0,\ 1) \cup (1,\ +\infty)$, por ser cociente de funciones continuas en sus dominios respectivos, y cuyo denominador se anula en $x = 1$.

Calculamos el límite:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{\ln x} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{\ln x} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{1}{\ln x} = \infty$$

La función diverge en $x = 1$, por lo que la discontinuidad es asintótica.

En $x = 0$ la función no está definida por la izquierda, calculamos el límite por la derecha: $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\ln x} = \left(\dfrac{1}{-\infty}\right) \to 0^-$, lo que nos indica que no hay asíntota en $x = 0$.

m) Esta función debe desdoblarse en dos trozos, como se indica a continuación:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x-1}{x^2+x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x-1}{x^2-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0,\ x \neq -1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0,\ x \neq 1 \end{cases}$$

Su dominio es $\mathbb{R} - \{-1,\ 0,\ 1\}$, y puesto que para $x < 0$ y $x > 0$ su expresión es una función racional, es continua en su dominio y en $x = 1$ y $x = -1$ hay discontinuidades evitables. Calculamos el límite en $x = -1$:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \left(-\frac{1}{x}\right) = 1$$

Por tanto, en $x = -1$, la discontinuidad es evitable.

Calculamos su límite en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} -\dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{0^-} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

Por tanto, en $x = 0$, la función presenta una discontinuidad asintótica. Calculamos su límite en $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$$

Por tanto, en $x = 1$, la discontinuidad es evitable.

n) La función es continua en su dominio, $\mathbb{R} - \{-2, -1,\ 1\}$, pues -2 anula el denominador del exponente de la función exponencial y los otros dos valores anulan el denominador de la función en conjunto. En estos dos puntos se comporta análogamente: $\lim\limits_{x \to \pm 1} \dfrac{e^{\frac{1}{x+2}}}{x^2-1} = \infty$, pues los límites laterales toman valores de $\pm\infty$ en ambos casos generando dos discontinuidades asintóticas.

El otro caso es distinto pues:

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{e^{\frac{1}{x+2}}}{x^2-1} = \frac{e^{-\infty}}{3} = 0 \text{ y } \lim_{x \to -2^+} \frac{e^{\frac{1}{x+2}}}{x^2-1} = \frac{e^{+\infty}}{3} = +\infty,$$

pero se obtiene también una discontinuidad asintótica, aunque solo por la derecha.

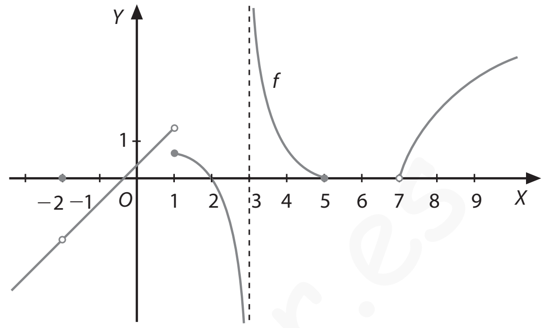
11 **Determina en qué casos es posible salvar la discontinuidad, cuando existan, en cada una de las funciones de la actividad anterior.**

En la función de la actividad **10. *b)*** se puede evitar la discontinuidad en $x = -1$, imponiendo que $f(-1) = -1/3$.

En la función de la actividad **10. *g)*** se puede evitar la discontinuidad en el punto $x = 0$, imponiendo que $f(0) = 1$.

En la función de la actividad **10. *m)*** se puede evitar la discontinuidad en $x = -1$, tomando $f(-1) = 1$, y también en $x = 1$, tomando $f(1) = 1$.

12 **A partir de su representación gráfica, clasifica las discontinuidades de la función *f*:**



Dom $f = (-\infty,\ 3) \cup (3,\ 5] \cup (7,\ +\infty)$

Discontinuidad evitable: $x = -2$

Discontinuidad de salto: $x = 1$

Discontinuidad asintótica: $x = 3$

Discontinuidad esencial no asintótica: $x = 5$ y $x = 7$

13 **Averigua, en cada uno de los siguientes casos, el valor que debe tomar la función en el punto indicado para que sea continua en él.**

a) $f(x) = \dfrac{2x^2+x-1}{3-3x^2}$ **en** $x = -1$

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$ **en** $x = 1$

c) $f(x) = \dfrac{2-\sqrt{4-x}}{3x}$ **en** $x = 0$

d) $f(x) = \left(2 - \dfrac{2}{x+1}\right)^{\frac{1}{x-1}}$ **en** $x = 0$

e) $f(x) = \dfrac{2-2\sqrt{x+2}}{x+1}$ **en** $x = -1$

f) $f(x) = \left(\dfrac{x^2+x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}$ **en** $x = 1$

g) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-1/x^2}}$ **en** $x = 0$

a) Calculamos $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$:

$$\lim_{x \to -1} \frac{2x^2+x-1}{3-3x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(2x-1)}{(x+1)(-3x+3)} = \frac{-1}{2}$$

Si imponemos que $f(-1) = \lim\limits_{x \to -1} f(x) = \dfrac{-1}{2}$, la función es continua en $x = -1$.

b) Calculamos $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{x+1-2}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Si imponemos que $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$, la función es continua en $x = 1$.

c) Calculamos $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{4-x}}{3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{4-(4-x)}{3x(2+\sqrt{4-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{3x(2+\sqrt{4-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3(2+\sqrt{4-x})}=\frac{1}{12}$$

Si imponemos que $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{1}{12}$, la función es continua en $x=0$.

d) El dominio es $(-\infty, -1)\cup(0, 1)\cup(1, +\infty)$, por lo que en $x=0$ la función presenta una discontinuidad esencial que no es posible evitar.

Además, si calculamos el límite por la derecha en cero, donde la función existe se tiene:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(2-\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{1}{x-1}}=L\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(2-\dfrac{2}{x+1}\right)}{x-1}=\infty$$

$\Rightarrow \ln L=\infty \Rightarrow L=e^{\infty}$, y por tanto diverge, luego se trata de una discontinuidad esencial y asintótica por la derecha.

e) Calculamos $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2-2\sqrt{x+2}}{x+1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to -1}\frac{4-4(x+2)}{(x+1)(2+2\sqrt{x+2})}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{-4x-4}{(x+1)(2+2\sqrt{x+2})}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{-4}{2+2\sqrt{x+2}}=\frac{-4}{4}=-1$$

Si imponemos que $f(-1)=\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-1$, la función es continua en $x=-1$.

f) El dominio es $(-\infty, -1)\cup(0, 1)\cup(1, +\infty)$, por lo que $x=1$ no pertenece al dominio. Calculamos $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}=(1^{\infty})=e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^2+x}{2}-1\right)\cdot\frac{1}{x^2-1}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)}{2}\cdot\frac{1}{x^2-1}}=\left(e^{\frac{0}{0}}\right)=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+2}{2(x+1)}}=e^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{e^3}$$

Si imponemos que $f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\sqrt[4]{e^3}$, la función es continua en $x=1$.

g) Calculamos $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+e^{-1/x^2}}=\frac{1}{1+e^{-\infty}}=1$$

Si imponemos que $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$, la función es continua en $x=0$.

14 **Estudia la continuidad de las siguientes funciones y clasifica sus discontinuidades.**

a) $f(x)=\begin{cases} 3^x & \text{si } x\le 2\\ \dfrac{2}{4-x^2} & \text{si } x>2\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } x<1\\ 1/2 & \text{si } x=1\\ -(x-1)^2+1 & \text{si } x>1\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} 1+2^{1/x} & \text{si } x<0\\ |x^2-x+1| & \text{si } x\ge 0\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} \ln|x-1| & \text{si } x<0\\ \dfrac{|x-2|}{x-2} & \text{si } x\ge 0\end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x^2-2x} & \text{si } x<0\\ \dfrac{e^x}{e^x-1} & \text{si } x>0\end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{5-\sqrt{25-x}}{x} & \text{si } x<0\\ 1 & \text{si } x=0\\ \dfrac{x+\ln(x+1)}{20x} & \text{si } x>0\end{cases}$

a) Para $x<2$ la función es continua, por ser una exponencial.

Para $x>2$, la función es continua, puesto que es racional y definida para todo valor real, excepto 2 y -2 que no pertenecen al dominio de definición.

Obsérvese que en $x=2$, $f(2)=9$, pero:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} 3^x=9\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2}{4-x^2}=\dfrac{2}{0^-}=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 2} f(x)$$

Por tanto, f tiene en $x=2$ una discontinuidad esencial, con una asíntota vertical por la derecha.

b) Para $x<1$, la función es polinómica, por lo que es continua.

Para $x>1$, la función es polinómica, por lo que es continua.

$f(1)=1/2$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)=0\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}[-(x-1)^2+1]=1\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1} f(x)$$

Como los dos límites laterales son finitos y no son iguales, la discontinuidad en $x=1$ es de salto finito, aunque la función esté definida en $x=1$ y valga $\dfrac{1}{2}$.

c) Para $x<0$, la función es continua, puesto que $2^{1/x}$ está definido para cualquier valor real excepto para $x=0$.

Para $x>0$, la función es continua, puesto que es el valor absoluto de un polinomio.

$f(0)=1$; además:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}|x^2-x+1|=1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(1+2^{1/x})=1+2^{1/0^-}=1+2^{-\infty}=1$$

Como los límites laterales son iguales, entonces $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$, que coincide con $f(0)$, por lo que la función es continua en $\mathbb{R}$.

d) $\ln|x-1|$ es una función continua en $\mathbb{R}-\{1\}$, por lo que para $x<0$, f es continua.

$\dfrac{|x-2|}{x-2}$ es una función racional, continua en $\mathbb{R}-\{2\}$, por lo que para $x>0$ es continua en $(0, 2)\cup(2, +\infty)$. Descomponemos f, tal como se indica a continuación:

$$f(x)=\begin{cases} \ln|x-1| & \text{si } x<0\\ \dfrac{-(x-2)}{x-2}=-1 & \text{si } 0\le x<2\\ \dfrac{x-2}{x-2}=1 & \text{si } x>2\end{cases}$$

$f(0) = -1$; además:

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \ln|x-1| = \ln 1 = 0\\ &\lim_{x\to 0^+} f(x) = -1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$$

Por tanto, la discontinuidad en $x = 0$ es de salto.

En $x = 2$ no existe función, y, como se observa, la discontinuidad que presenta también es de salto.

Por lo tanto, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0, 2\}$.

e) Para $x < 0$, la función es racional, y su denominador no se anula en este dominio.

Para $x > 0$, la función es un cociente de funciones continuas, cuyo denominador no se anula para valores positivos.

En $x = 0$, la función no está definida, y además:

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-x-2}{x(x-2)} = \frac{-2}{0^-\cdot(-2)} = -\infty\\ &\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{e^x-1} = \frac{1}{1^+-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \infty$$

En consecuencia, la discontinuidad en $x = 0$ es asintótica.

f) Para $x < 0$, la función es continua, puesto que es un cociente de funciones continuas en sus dominios y, por tanto, continuo en $(-\infty, 0) \cup (0, 25]$.

Para $x > 0$, la función es continua, ya que es un cociente de funciones continuas, continuo en $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

$f(0) = 1$; además:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{5-\sqrt{25-x}}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{25-(25-x)}{x(5+\sqrt{25-x})} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{5+\sqrt{25-x}} = \frac{1}{10}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{x+\ln(x+1)}{20x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x+x}{20x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{20x} = \frac{1}{10}$$

Por tanto, $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{10} \neq f(0) = 1$, por lo que la discontinuidad es evitable en $x = 0$.

15 **Estudia para qué valores de *a*, o de *a* y *b*, son continuas estas funciones en los puntos que se indican.**

a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 1\\ 3-ax^2 & \text{si } x > 1\end{cases}$ **en $x = 1$**

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-a}{x-2} & \text{si } x \neq 2\\ a & \text{si } x = 2\end{cases}$ **en $x = 2$**

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{ax}}{x+2} & \text{si } x \leq 0\\ x^2+2ax+a & \text{si } x > 0\end{cases}$ **en $x = 0$**

d) $f(x) = \begin{cases} E(x^2)+1 & \text{si } x \leq 2\\ \dfrac{x^2-a}{x-2} & \text{si } x > 2\end{cases}$ **en $x = 2$**

e) $f(x) = \begin{cases} ax^2+b & \text{si } x < 0\\ x-a & \text{si } 0 \leq x < 1\\ \dfrac{a}{x}+b & \text{si } 1 \leq x\end{cases}$ **en $x = 0$ y en $x = 1$**

a) $\exists\, f(1) = 2 \begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x+1) = 2\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (3-ax)^2 = 3-a\end{cases}$

$\Rightarrow 2 = 3 - a \Rightarrow a = 1$

b) $f(2) = a$, para que sea continua $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-a}{x-2} = a$

Al anularse el denominador, la única forma de obtener un límite finito es que se anule también el numerador, para lo cual necesitamos que a valga 4:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4 = a$$

c) La función es continua en $x = 0$ si $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

Existe $f(0) = 1/2$.

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1/2\\ &\lim_{x\to 0^+} f(x) = a\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = \frac{1}{2}, \text{ si: } a = \frac{1}{2}$$

La función es continua en $x = 0$ si: $a = \dfrac{1}{2}$

d) $\exists\, f(2) = 4$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4; \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{4-a}{0}$$

Para que el límite exista, el límite lateral por la derecha en $x = 2$ debe existir. Para que esto sea así, el numerador $(x^2 - a) = (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})$ debe tener una raíz $x = 2$, es decir, $\sqrt{a} = 2 \Rightarrow a = 4$.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = 4$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = 4$ si $a = 4$.

e) En $x = 0$, $f(0) = -a$

$\lim\limits_{x\to 0^-} (ax^2 + b) = b$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} (x - a) = -a$, por lo que si $b = -a$, $f(x)$ es continua en $x = 0$.

En $x = 1$, $f(1) = a + b$

$\lim\limits_{x\to 1^-} (x - a) = 1 - a$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{a}{x} + b\right) = a + b$, por lo que si $1 - a = a + b$, $f(x)$ es continua en $x = 1$.

Resolviendo el sistema $\begin{cases} a = -b\\ 1-a = a+b\end{cases} \Rightarrow a = 1, b = -1$

16 **Halla *a* sabiendo que *f*: $[0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es continua en $[0, +\infty)$.**

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax} & \text{si } 0 \leq x \leq 8\\ \dfrac{x^3-32}{x-4} & \text{si } x > 8\end{cases}$$

Estudiaremos la función en $x = 8$.

1) $\exists\, f(8) = \sqrt{8a}$

2) $\left.\begin{cases}\lim\limits_{x\to 8^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 8^-} \sqrt{ax} = \sqrt{8a}\\ \lim\limits_{x\to 8^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 8^+} \dfrac{x^2-32}{x-4} = 8\end{cases}\right. \Rightarrow 8 = \sqrt{8a} \Rightarrow a = 8$

17 **Calcula *a* para que $f(x) = \dfrac{-2x^2+ax+1}{2x^2+5x+2}$ tenga en $x = -\dfrac{1}{2}$ una discontinuidad evitable. Estudia si presenta otra discontinuidad y clasifícala.**

$f(x) = \dfrac{-2x^2+ax+1}{2x^2+5x+2}$ tiene en $x = -\dfrac{1}{2}$ una discontinuidad evitable. Puesto que f es una función racional, $-\dfrac{1}{2}$ es una raíz de los polinomios del numerador y del denominador.

En efecto, para el denominador:

$2(-1/2)^2 + 5(-1/2) + 2 = (1/2) - (5/2) + 2 = -2 + 2 = 0$

Para el numerador:

$-2(-1/2)^2 + a\,(-1/2) + 1 = 0 \Rightarrow a = 1$

Si $a = 1$, $f(x) = \dfrac{-2x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x + 2}$

$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \left\{-2, -\dfrac{1}{2}\right\}$

Por ser f una función racional, es continua en su dominio.

En $x = -2$, $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \infty$, luego la discontinuidad es asintótica.

Continuidad de una función en un intervalo

18 **Estudia la continuidad de las siguientes funciones en el intervalo que se indica.**

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \le 1 \\ 2 - x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ **en (0, 1) y [0, 1]**

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x - 1}{x - 1} & \text{si } x < 2 \\ \ln(x - 1) & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$ **en [0, 3]**

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - 2^{1/x}} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$ **en [−1, 0]**

a) En el intervalo (0, 1), $f(x)$ es una función racional, cuyo denominador no se anula en dicho intervalo. Por tanto, f es continua en (0, 1).

En el intervalo [0, 1] debe cumplirse, además:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1)$$

Pero $f(0)$ no existe, por lo que la función no es continua en [0, 1].

b) Para $x < 2$, la función es racional y su denominador se anula en $x = 1$; por tanto, no es continua en $x = 1$. Puesto que $1 \in [0, 3]$, podemos asegurar que f no es continua en dicho intervalo.

c) $f(x) = \dfrac{1}{1 - 2^{1/x}}$ es continua para todos los valores, excepto el 0; por tanto, f es continua en el intervalo $(-1, 0)$.

Veamos si lo es en el intervalo $[-1, 0]$:

$f(-1) = 2 = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$

$f(0) = 0$, pero $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{1 - 2^{1/x}} = 1 \neq 0$

En consecuencia, f no es continua en $[-1, 0]$.

Ejercicios de aplicación

19 **Construye gráficas de funciones que cumplan los siguientes requisitos.**

a) **Dom $f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ Rec $f = \mathbb{R}$**

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2 \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$f(0) = 0$

$f > 0$ **en** $(-\infty, -2) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$

$f < 0$ **en** $(-2, 0)$

b) **Dom $f = \mathbb{R} - \{-2\}$ Rec $f = (-\infty, 4)$**

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 4 \qquad \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

Asíntota horizontal por la izquierda: $y = 2$

Asíntota horizontal por la derecha: $y = 0$

Máximo relativo en $x = 0$

c) **Dom $f = \mathbb{R}$**

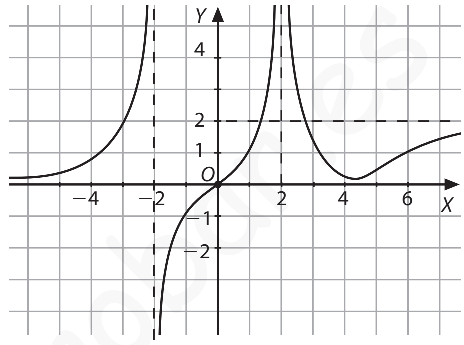
$f^{-1}(0) = \{-3, 1\} \qquad f(-2) = -2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = 0$

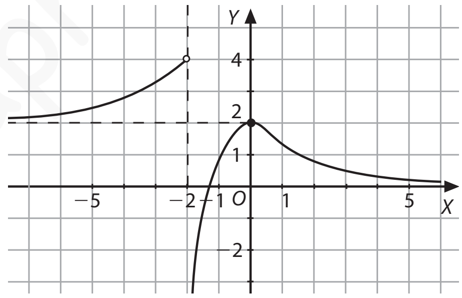
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$

Mínimo relativo en $x = -1$

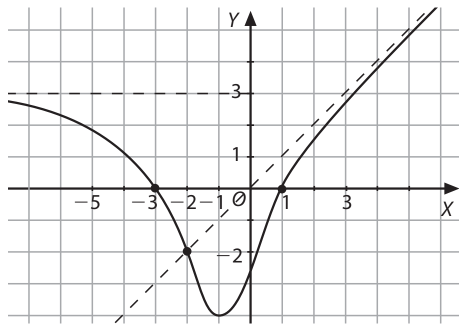
a)



b)



c)



20 **Sea la función:**

$$f(x) = \begin{cases} \ln x - 1 & \text{si } x > 1 \\ 2x^2 + ax + b & \text{si } x \le 1 \end{cases}$$

Encuentra los valores de *a* y *b* para que la función sea continua y su gráfica pase por el origen de coordenadas.

En primer lugar $f(0) = 0 \Rightarrow b = 0$

Si $x \neq 1$, la función es continua.

Para que la función sea continua en $x = 1$: $f(1) = 2 + a$

Debe existir $\lim\limits_{x \to 1} f(1)$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2 + a \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2 + a = -1 \Rightarrow a = -3$$

Si $a = -3$ y $b = 0$, la función es continua y pasa por (0, 0).

21 **Dada la función:** $f(x) = \dfrac{ax^2 + b}{x^3 + 2ax^2 + bx + 3}$

a) **Determina *a* y *b* sabiendo que la función presenta una discontinuidad evitable en $x = 1$.**

b) **Define una función $g(x)$ que sea continua en $x = 1$ y que coincida en el dominio de definición de esta. Razona las respuestas.**

a) $\lim\limits_{x \to 1} = \dfrac{ax^2 + b}{x^3 + 2ax^2 + bx + 3} = \dfrac{a + b}{4 + 2a + b} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$\Rightarrow a = -4,\ b = 4$

b) $g(x) = \dfrac{-4 - 4x}{x^2 - 7x - 3}$

22 **Di cuál de las siguientes afirmaciones es cierta y razona por qué:**

a) **Si una función *f* está acotada en un intervalo cerrado [*a, b*], entonces es continua en dicho intervalo.**

b) **Si una función *f* no está acotada en un intervalo cerrado [*a, b*], entonces no es continua en dicho intervalo.**

El teorema de acotación de una función en un intervalo cerrado se enuncia del siguiente modo:

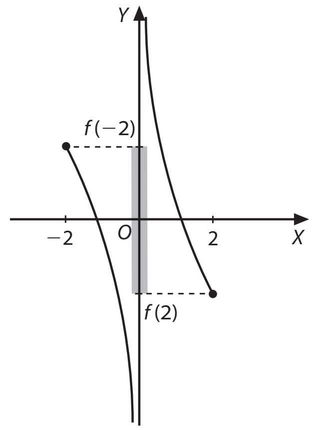
«Si una función *f* es continua en un intervalo cerrado [*a*, *b*], entonces está acotada en dicho intervalo.»

Por tanto, es cierta la segunda afirmación.

Respecto a la primera, basta considerar la función $f(x) = |x|/x$ que está acotada en todo su dominio y que no es continua en el intervalo $[-1, 1]$.

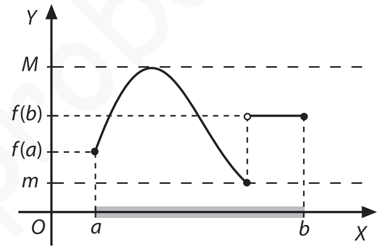
23 **Sea *f* una función cuyo dominio es $\mathbb{R}$. Si *f* toma todos los valores comprendidos entre $f(-2)$ y $f(2)$, ¿se puede afirmar que la función *f* es continua en $[-2, 2]$?**

No se puede afirmar, ya que se puede considerar una función como la que se propone en esta representación gráfica:



24 **Si una función *f* alcanza en el intervalo [*a, b*] sus extremos absolutos, *m* y *M*, y toma en [*a, b*] todos los valores comprendidos entre *m* y *M*, razona si esta condición es suficiente para asegurar que *f* es continua en [*a, b*].**

Puede suceder que exista una función que cumpla las hipótesis del enunciado, y sin embargo no sea continua en el intervalo considerado. Basta observar la función representada gráficamente a continuación:



Por tanto, la condición enunciada no es suficiente para garantizar la continuidad.

Evaluación (página 141)

1. Calcula el valor de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2x}{x^2-4}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \left(2-\dfrac{x+1}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-x-1}{-3x^2+3x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x^2+x}{2x-x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+4x-2}}{1+x}$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x-\sqrt{x}}}{1-\sqrt{x}}$

h) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-2x}}\right)$

i) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(3-\dfrac{2x^2+1}{x^2-1}\right)^{x-\sqrt{2x^2+1}}$

j) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\ln x^2-8}{x-3}$

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}}{2}=\dfrac{0}{2}=0$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2x}{x^2-4}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2-2x}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-x-2}{x-2\,x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-1}{x+2}=-\dfrac{1}{4}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \left(2-\dfrac{x+1}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}}=(1^\infty)=\lim\limits_{x\to 1} e^{\left(1-\frac{x+1}{2}\right)\frac{1}{x-1}}=e^{-\frac{1}{2}}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-x-1}{-3x^2+3x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+1\,x-1}{-3x\,(x-1)}=\dfrac{3}{-3}=-1$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x^2+x}{2x-x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\left(\dfrac{0}{0}\right)^{\infty}$, estudiamos $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x\,(x+1)}{x\,(2-x)}\right)=\dfrac{1}{2}$, luego $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+x}{2x-x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\infty}=0$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+4x-2}}{1+x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2}}{x}=-\sqrt{3}$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x-\sqrt{x}}}{1-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{(\sqrt{x}-\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}}{-(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}-\sqrt{\dfrac{\sqrt{x}(x-1)}{(x-1)^2}}=\lim\limits_{x\to 1}-\sqrt{\dfrac{\sqrt{x}}{1-x}}=\left(\dfrac{-1}{0}\right)=-\infty$

h) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-2x}}\right)=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2-2x}}{x(x^2-x^2+2x)}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x}{2x^2}=0$

i) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(3-\dfrac{2x^2+1}{x^2-1}\right)^{x-\sqrt{2x^2+1}}$, se puede observar que la base tiende a 1, veamos el exponente:

$\lim\limits_{x\to \infty} x-\sqrt{2x^2+1}=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-2x^2-1}{x+\sqrt{2x^2+1}}=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{-x^2-1}{x+\sqrt{2x^2+1}}=-\infty$

luego es una indeterminación del tipo 1^∞ entonces: $\lim\limits_{x\to \infty} e^{\left(2-\frac{2x^2+1}{x^2-1}\right)\left(x-\sqrt{2x^2+1}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3\left(x-\sqrt{2x^2+1}\right)}{x^2-1}}$

Nos centramos en el límite del exponente: $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{-3\left(x-\sqrt{2x^2+1}\right)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+3}{(x^2-1)\left(x+\sqrt{2x^2+1}\right)}=0$ y por lo tanto el límite es $e^0=1$

j) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\ln (x^2-8)}{x-3}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 3}(x^2-8)^{\frac{1}{x-3}}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-8}{x-3}=\left(\dfrac{1}{0}\right)=+\infty$

2. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{1}{1+|x|}$ ***b)*** $f(x)=\dfrac{2x^2+x-1}{3-3x^2}$ ***c)*** $f(x)=\dfrac{1}{2-2x^{1/x}}$

a) $f(x)$ es continua para todo x tal que $1+|x|\neq 0$, pero $|x|\geq 0\,\forall x\in\mathbb{R}$, luego la función es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Se trata de un cociente de polinomios y será continua siempre que el denominador no se anule. Este se anula en los valores -1 y 1, luego la función es continua en $\mathbb{R}-\{-1, 1\}$.

c) En este caso la función no está definida para valores negativos de x, ni para el valor 1 que anula el denominador. Claramente tampoco está definida para $x=0$. Luego la función es continua en $(0, 1)\cap(0, +\infty)$.

3. Encuentra los valores de a para que $f(x)$ sea continua en el intervalo $[-2, -1]$.

$$\begin{cases} x^2 - 2|x| - a & \text{si } x < -1 \\ (x - a)^2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

Las dos partes de la función son continuas en sus dominios. $f(-1) = a^2 + 2a + 1$, valor que coincide con el límite en $x = -1$ por la derecha, estudiemos el otro:

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} f(x) = x^2 - 2 \ (-x) \ - a = 1 - 2 - a = \ -a - 1$. Para que sea continua debe existir el límite, es decir: $a^2 + 2a + 1 = -a - 1 \Rightarrow a^2 + 3a + 2 = 0 \Rightarrow a_1 = -1$ y $a_2 = -2$

4. Halla el valor de a y de b para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - bx + a & \text{si } x < 1 \\ ax + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

La función es cúbica a la izquierda del 1, y de primer grado a la derecha del mismo, por lo tanto, es continua para todo punto salvo quizás para $x = 1$.

Estudiamos la continuidad en este punto a través de los límites laterales:

$\lim_{x \to 1^-} x^3 - bx + a = 1 - b + a$

$\lim_{x \to 1^+} ax + b = a + b$

Luego si $1 - b + a = a + b$, esto es $b = 1/2$, independientemente del valor que tome a la función es continua en este punto.