7 LÍMITES DE FUNCIONES Y CONTINUIDAD

ACTIVIDADES

1 **Determina, si existe, el límite en $x = 2$ de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < 2 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Sol: $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$

2 **Calcula, si existe, el límite en $x = 0$ de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Sol: $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$

3 **Escribe la ecuación de la asíntota vertical de la función anterior.**

Sol: $x = 0$.

4 **Dada la función $f(x) = \dfrac{3-x}{(x-1)^2}$, calcula $\lim_{x\to 0} f(x)$ y $\lim_{x \to 1} f(x)$.**

Sol: $\lim_{x \to 0} \dfrac{3-x}{(x-1)^2} = 3 \qquad \lim_{x \to 1} \dfrac{3-x}{(x-1)^2} = +\infty$

5 **Calcula: $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{1+|x|}$**

Sol: $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

6 **Determina los límites laterales de la función $f(x) = \dfrac{|x+1|}{x+1}$ en $x = -1$.**

Sol: $\lim_{x \to -1^-} f(x) = -1$

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1$

7 **Calcula, si las hay, las asíntotas verticales de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

b) $f(x) = \text{tg}\, x$

c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

d) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$

e) $f(x) = \ln x$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

a) $x = 1$ y $x = -1$.

b) $x = (2k+1) \cdot \pi/2,\ k \in \mathbb{Z}$

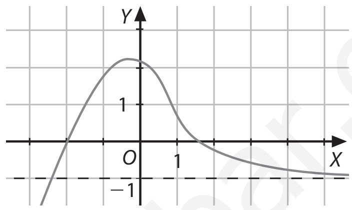
c) No tiene asíntotas verticales.

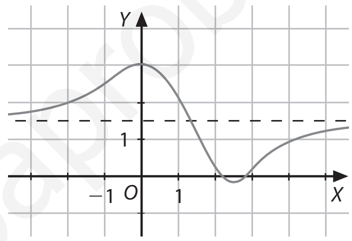
d) $x = 1$.

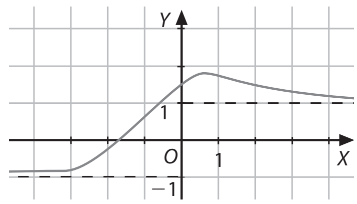
e) $x = 0$.

f) $x = 1$.

8 **Indica las asíntotas horizontales de las funciones de las figuras.**







a) Por la derecha: $y = -1$

b) $y = 1{,}5$

c) Por la izquierda: $y = -1$, por la derecha: $y = 1$

9 **Halla las ecuaciones de las asíntotas horizontales de estas funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{1-2x^2}{x^2-1}$

b) $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x+1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{1-|x|}$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$

f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+2}$

a) $\lim_{x \to \infty} f(x) = -2$, asíntota horizontal $y = -2$.

b) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \dfrac{3}{2}$, asíntota horizontal $y = \dfrac{3}{2}$.

c) $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, asíntota horizontal $y = 0$.

d) $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, asíntota horizontal $y = 0$.

e) $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$, asíntota horizontal $y = 1$, tanto si x tiende a $+\infty$ o a $-\infty$

f) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$, asíntota horizontal por la izquierda $y = -1$, por la derecha $y = 1$.

10 **Construye gráficas que cumplan las siguientes condiciones.**

a) **Dom $f = \mathbb{R}$, Rec $f = [-1, +\infty)$**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x \to +\infty} = +\infty$, $f(3) = 3$, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 2$, $f^{-1}(0) = \{0, 2\}$

b) **Dom $f = \mathbb{R} - \{0, 2\}$, Rec $f = (-\infty, 0) \cup \{1\} \cup (3, +\infty)$**

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$,

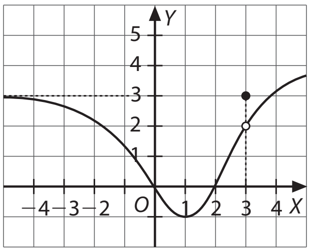
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

(Ten en cuenta que $f(x) < 0$ si $x < 0$ y que $f(x) > 0$ si $x > 0$.)

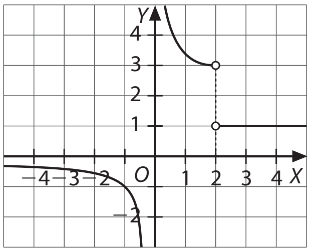
c) **Dom $f = \mathbb{R}$, Rec $f = \mathbb{R}$**

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

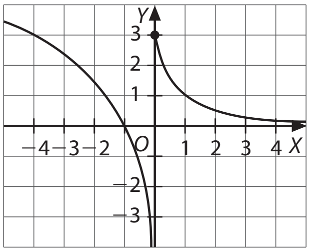
a)



b)



c)



11 **Resuelve cada uno de los límites siguientes por el método que consideres más adecuado.**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{2/x}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x} - (x - 2)}{x - 2}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{3x^2 + 1}{5x^2 - 2}\right)^{\frac{x-1}{2}}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 5x} - x$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x + 1}{x - 2}\right)^{\sqrt{x^2 + 5x} - x}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1 - x} - 1}$

g) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x + 2} - 2}{x - 2}$

h) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{2}}{x^2 + x - 2}$

j) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x\sqrt{x}}{1 - x^2}$

k) $\lim\limits_{x \to 1/2} \dfrac{\ln(4x - 1)}{2x - 1}$

l) $\lim\limits_{x \to 0} (2x + 1)^{1/x}$

m) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(2x - 6)^2}{\sqrt{2x} - \sqrt{6}}$

n) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x - 6}{\sqrt{2x} - \sqrt{6}}$

ñ) $\lim\limits_{x \to 1/2} e^{\frac{1}{2x - 1}}$

o) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{3x} + 3x}{2^x}$

p) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \text{sen}\, x)^{\frac{2}{\text{tg}\, x}}$

q) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(2x^2 + 1)}{2x}$

a) 1

b) 0

c) $+\infty$

d) $5\sqrt{2} - 5$

e) 1

f) -2

g) $\dfrac{1}{4}$

h) 3

i) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

j) $\dfrac{3}{4}$

k) 2

l) e^2

m) 0

n) $2\sqrt{6}$

ñ) $\nexists$

o) $+\infty$

p) e^2

q) 0

12 **Estudia la continuidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican.**

a) **$f(x) = E(x)$, en $x = \dfrac{2}{3}$ y en $x = 1$.**

b) **$f(x) = \dfrac{2 - x}{x^2 - 2x}$, en $x = 0$ y en $x = 2$.**

c) **$f(x) = 4 - \ln x$, en $x = 0$ y en $x = 4$.**

b) **$f(x) = \dfrac{\text{sen}\, x}{x}$, en $x = 0$.**

a) En $x = \dfrac{2}{3}$ es continua; en $x = 1$ no es continua.

b) No es continua.

c) En $x = 0$ no es continua, en $x = 4$ es continua.

d) No es continua.

13 **Indica en qué casos es posible salvar la discontinuidad en las funciones de la actividad anterior.**

Sol: En ***b)*** se puede salvar la discontinuidad en el punto $x = 2$ imponiendo $f(2) = \lim\limits_{x \to 2} f(x) = -1/2$.

En ***d)*** imponiendo $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

14 **Estudia la continuidad de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{3x^2 - x}{x^3 - 1}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{\sqrt{x + 1}}{x + 2} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{2 - x}}{x}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$

f) $f(x) = \dfrac{\ln(1 + x^2)}{\text{sen}\, x}$

a) Es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$.

b) Es continua.

c) Es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

d) Es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, 2)$.

e) Es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

f) Es continua en $\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

15 **Estudia para qué valores de *a* son continuas en $\mathbb{R}$ estas funciones.**

a) $f(x) = \begin{cases} ax^3 - 3x^2 + ax + 2 & \text{si } x < \\ (1-a)x^2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+|x|}{1-x} & \text{si } x < -1 \\ a & \text{si } x = -1 \\ \dfrac{-2+2\sqrt{x+2}}{x+1} & \text{si } x > -1 \end{cases}$

c) $f(x) \begin{cases} 1 + a^x & \text{si } x \leq 0 \\ \ln(x^2 + a) & \text{si } x > 0\ (a > 0) \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)^2 - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) -3.

b) 1

c) e^2

d) 2

16 **Clasifica las discontinuidades de la función.**

$$f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|}$$

Sol: Discontinuidad evitable en $x = 0$.

Discontinuidad asintótica en $x = -1$.

Discontinuidad asintótica en $x = 1$.

17 **Clasifica las discontinuidades de las funciones de la actividad 14. Cuando la discontinuidad sea evitable, calcula el valor que debe asignarse a la función para salvar la discontinuidad.**

a) En $x = 1$, discontinuidad asintótica.

b) No hay discontinuidades.

c) En $x = -1$, discontinuidad de salto.

d) En $x = 0$, discontinuidad evitable: si $f(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$, *f* es continua en $(-\infty, 2)$.

e) En $x = 0$, discontinuidad de salto.

f) En $x = 0$, discontinuidad evitable: si $f(0) = 0$, *f* es continua en $x = 0$. Las otras discontinuidades son asintóticas.

18 **Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x - b}{2x^3 - ax - 2x}$ averigua *a* y *b* sabiendo que en $x = 2$ la función presenta una discontinuidad evitable. A continuación, calcula y clasifica las demás discontinuidades.**

Sol: $b = 2 \quad a = 3$

En $x = 0$, discontinuidad asintótica.

En $x = -\dfrac{1}{2}$, discontinuidad asintótica.

19 **Razona si la función $f(x) = \operatorname{tg} x$ tiene algún cero en un punto interior del intervalo cerrado $[0, \pi]$.**

Sol: No se puede asegurar que tenga algún cero.

20 **Precisa hasta las centésimas la solución de la** ecuación $x^3 - 2x + 1 = 0$ en $[-2, -1]$.

Sol: $x = -1{,}62$

21 **Resuelve las siguientes cuestiones:**

a) **Demuestra que al menos existe un número real distinto de 0 para el cual se verifica la ecuación $x^2 + e^x = 1 - \operatorname{sen} x$.**

b) **Determina un intervalo de longitud 0,1 en el que esté comprendida una solución de la ecuación $2x + 1 = \operatorname{sen} x$.**

b) $(-0{,}9; -0{,}8)$.

22 **La ecuación $(x+1)^{\ln x} = 5$ tiene una solución en el intervalo [3, 4]. Hállala con dos cifras decimales exactas. (La función $f(x) = (x+1)^{\ln x}$ es continua en $\mathbb{R}^+$.)**

Sol: $x = 3{,}11$.

23 **Sea *f* una función que toma todos los valores comprendidos entre *f*(*a*) y *f*(*b*). ¿Significa esto que la función es continua en [*a*, *b*]? Para reflexionar sobre esta pregunta, ayúdate de una representación gráfica.**

Sol: No necesariamente.

24 **Dada la siguiente función:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+2x^2)}{x^2 - 3x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Calcula el valor del parámetro *a* para que la función tome todos los valores comprendidos entre $f(-1)$ y $f(1)$.

Sol: $a = 2$.

25 **Sea *f* una función acotada en el intervalo [*a*, *b*]. ¿Significa esto que *f* es continua en [*a*, *b*]? Ayúdate de una representación gráfica.**

Sol: No necesariamente.

26 **Si *f* es una función acotada en [*a*, *b*] y no es continua en dicho intervalo, ¿qué tipo de discontinuidades puede presentar en [*a*, *b*]?**

Sol: Discontinuidades evitables, de salto o esenciales no asintóticas.

Ejercicios y problemas

Cálculo de límites

27 **Calcula los siguientes límites.**

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{2x^2}{x^2 + 5}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

c) $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{2x^2 - 2x - 4}$

d) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{3x - 1}{(x-2)^2}$

e) $\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{2x + 1}{x + 2}$

f) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{-x^2 - x + 6}{(x-2)^2 x}$

g) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{2 - x}{x^3}$

h) $\displaystyle\lim_{x \to \pi} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}$

a) 0 *e)* ∞

b) 12 *f)* ∞

c) $\dfrac{2}{3}$ *g)* ∞

h) 0

d) $+\infty$

28 **Halla los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{x+2}{x-2} - \dfrac{6x+4}{x^2-4} \right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x+3}{x-1} \cdot \dfrac{x^2+x-2}{x^2-3} \right)$

c) $\lim\limits_{x \to 1/2} \left(\dfrac{2x+1}{2x+2} \right)^{\frac{2x-1}{\sqrt{2x-1}}}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 1/3} \left(\dfrac{2}{1-x} \right)^{\frac{x}{3x-1}}$

a) $\dfrac{1}{2}$ *b)* -6

c) 1 *d)* $\nexists$

29 **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{1-\sqrt{x+1}}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^2-4x-6}{3-\sqrt{6+x}}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{2x}$ **e)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-\sqrt{x}}}$

c) $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{3x+3}{\sqrt{5x^2+x}}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$

a) -2 *d)* -48

b) $\dfrac{1}{8}$ *e)* 0

c) 0 *f)* $\dfrac{1}{4}$

30 **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3+x^2-x+1)$ **e)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+4x}}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^3+x^2-x+1)$ **f)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+4x}}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{4-x^2}$ **g)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{\sqrt{2x^4+3}}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3-x^2+x-2}{x^4-x^2}$

a) $-\infty$ *e)* $\sqrt{2}$

b) $+\infty$ *f)* $-\sqrt{2}$

c) $\nexists$

d) 0 *g)* $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

31 **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{4x^2+1} - (2x+1) \right]$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\sqrt{4x^2+1} - (2x+1) \right]$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^2+1}{x^2+x} \right)^{\sqrt{x^2+1}-x}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{2x^2+1}{x^2+x} \right)^{\sqrt{x^2+1}-x}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+2x-1} - x \right)$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+2x-1} - x \right)$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{x}$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{x}$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{2+x} - \sqrt{x} \right)$

j) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x+\sqrt{2+x}}{x+1}$

a) -1 *f)* $+\infty$

b) $+\infty$ *g)* 0

c) 1 *h)* 0

d) $+\infty$ *i)* 1

e) 1 *j)* $\dfrac{3}{2}$

32 **Estudia el comportamiento de la siguiente función en los extremos de su dominio: $f(x) = |2 - 2^x|$**

Sol:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Hay una asíntota horizontal por la izquierda, $y = 2$.

33 **Calcula los límites cuando $x \to -1$ y $x \to 0$ de la siguiente función y encuentra sus asíntotas.**

$$f(x) = \frac{x^2+|x|}{|x^2+x|}$$

Sol: $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = +\infty$

Por tanto, $x = -1$ es una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$

Por consiguiente, $y = 1$ es una asíntota horizontal.

34 **Calcula los límites siguientes.**

a) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{4x-5}{x+1} \right)^{\frac{x^2-1}{(x-2)^2}}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - \dfrac{x^2+1}{x^2-2} \right)^{\sqrt{2x^2+1}-x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x} - \dfrac{x^3-x^2-x+2}{x^2} \right)^{\frac{3-x^2}{x}}$

a) $\nexists$ *b)* 1 *c)* e^{-2}

35 **Calcula el valor de a para que se verifiquen las siguientes igualdades.**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3ax^3-2ax^2+ax-1}{x^2-6x^3} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2x^2+ax} - \sqrt{2x^2+1} \right) = \sqrt{2}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2+ax+2}{x^2-2x} \right)^{\frac{3x^2-1}{x}} = \dfrac{1}{e^3}$

a) $a = -2$

b) $a = 4$

c) $a = -3$

Continuidad de una función en un punto

36 **Estudia la continuidad de las siguientes funciones y clasifica sus discontinuidades.**

a) $f(x) = \ln|x+1|$

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{2x^2+x-1}$

c) $f(x) = \dfrac{|2x+1|}{2x^2-x-1}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x+3}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{1-e^x}$

g) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

h) $f(x) = 2^{\text{tg}\,x}$

i) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x^2(x+1)}$

j) $f(x) = \dfrac{2^{1/x}}{1+x}$

k) $f(x) = \dfrac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}$

l) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

m) $f(x) = \dfrac{|x|-1}{x^2 \quad |x|}$

n) $f(x) = \dfrac{\text{arc tg}\,x}{\ln x}$

a) La función es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$. La discontinuidad en $x = -1$ es asintótica.

b) La función es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1/2\}$.

En $x = -1$, la discontinuidad es evitable.

En $x = 1/2$, la discontinuidad es asintótica.

c) La función es continua en $\mathbb{R} - \{-1/2, 1\}$.

En $x = -1/2$, la función presenta una discontinuidad de salto.

En $x = 1$, la función presenta una discontinuidad asintótica.

d) La función es continua en $\mathbb{R} - \{2, -3\}$.

La discontinuidad es asintótica en ambos puntos.

e) La función es continua en $\mathbb{R}$.

f) La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

En $x = 0$, la función presenta una discontinuidad asintótica.

g) La función es continua en $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

La recta de ecuación $x = -1$ es una asíntota vertical de la función.

En $x = 0$, la función presenta una discontinuidad evitable.

h) Es continua en $\mathbb{R} - \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right\}$

En los puntos de abscisa $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, la función presenta una discontinuidad esencial, asintótica por la izquierda.

i) Es continua en $\mathbb{R} - \{0, -1\}$.

En $x = 0$ y en $x = -1$ la discontinuidad es asintótica.

j) Es una función continua en $\mathbb{R} - \{0, -1\}$.

En $x = 0$, la función presenta una discontinuidad esencial, asintótica por la derecha.

En $x = -1$, la discontinuidad es asintótica.

k) Es una función continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

En $x = 0$, la función presenta una discontinuidad asintótica.

l) Es continua en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

En $x = 1$, la discontinuidad es asintótica.

En $x = 0$ la función no está definida por la izquierda.

No hay asíntota en $x = 0$.

m) Es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$. En $x = 1$ y $x = -1$ hay discontinuidades evitables.

En $x = 0$, la función presenta una discontinuidad asintótica.

n) Es continua en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

En $x = 0$, la función no está definida por la izquierda.

En $x = 0$ no existe asíntota.

En $x = 1$ la función presenta una discontinuidad asintótica.

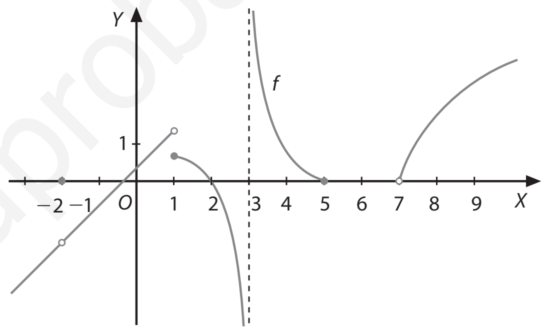
37 **Determina en qué casos es posible salvar la discontinuidad, cuando existan, en cada una de las funciones de la actividad anterior.**

Sol: En la función de la actividad **10.** ***b)*** se puede evitar la discontinuidad en $x = -1$, imponiendo que $f(-1) = -1/3$.

En la función de la actividad **10.** ***g)*** se puede evitar la discontinuidad en el punto $x = 0$, imponiendo que $f(0) = 1$.

En la función de la actividad **10.** ***m)*** se puede evitar la discontinuidad en $x = -1$, tomando $f(-1) = 1$, y también en $x = 1$, tomando $f(1) = 1$.

38 **A partir de su representación gráfica, clasifica las discontinuidades de la función *f*:**



Sol:

Discontinuidad evitable: $x = -2$

Discontinuidad de salto: $x = 1$

Discontinuidad asintótica: $x = 3$

Discontinuidad esencial no asintótica: $x = 5$ y $x = 7$

39 **Averigua, en cada uno de los siguientes casos, el valor que debe tomar la función en el punto indicado para que sea continua en él.**

a) $f(x) = \dfrac{2x^2+x-1}{3-3x^2}$ en $x = -1$

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$ en $x = 1$

c) $f(x) = \dfrac{2-\sqrt{4-x}}{3x}$ en $x = 0$

d) $f(x) = \left(2 - \dfrac{2}{x+1}\right)^{\frac{1}{x-1}}$ en $x = 0$

e) $f(x) = \dfrac{2-2\sqrt{x+2}}{x+1}$ en $x = -1$

f) $f(x) = \left(\dfrac{x^2+x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}$ en $x = 1$

g) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-1/x^2}}$ en $x = 0$

a) $\dfrac{-1}{2}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

c) $\dfrac{1}{12}$

d) En $x = 0$ la función presenta una discontinuidad esencial que no es posible evitar.

e) -1

f) $\sqrt[4]{e^3}$

g) 1

40 **Estudia la continuidad de las siguientes funciones y clasifica sus discontinuidades.**

a) $f(x) = \begin{cases} 3^x & \text{si } x \le 2 \\ \dfrac{2}{4 - x^2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 1 \\ 1/2 & \text{si } x = 1 \\ -(x-1)^2 + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 + 2^{1/x} & \text{si } x < 0 \\ |x^2 - x + 1| & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \ln|x - 1| & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{|x-2|}{x-2} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{e^x}{e^x - 1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5 - \sqrt{25 - x}}{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x + \ln(x+1)}{20x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Para $x < 2$ la función es continua.

Para $x > 2$, la función es continua.

f tiene en $x = 2$ una discontinuidad esencial, con una asíntota vertical por la derecha.

b) Para $x < 1$, la función es continua.
Para $x > 1$, la función es continua.

La discontinuidad en $x = 1$ es de salto finito.

c) La función es continua en $\mathbb{R}$.

d) La discontinuidad en $x = 0$ es de salto.

En $x = 2$ la discontinuidad también es de salto.
$f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0, 2\}$.

e) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

La discontinuidad en $x = 0$ es asintótica.

f) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.
La discontinuidad es evitable en $x = 0$.

41 **Estudia para qué valores de *a*, o de *a* y *b*, son continuas estas funciones en los puntos que se indican.**

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \le 1 \\ 3 - ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - a}{x - 2} & \text{si } x \ne 2 \\ a & \text{si } x = 2 \end{cases}$ en $x = 2$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{ax}}{x + 2} & \text{si } x \le 0 \\ x^2 + 2ax + a & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en $x = 0$

d) $f(x) = \begin{cases} 5 + 2\,\text{sen}\, x & \text{si } x \le 0 \\ -x^2 + ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en $x = 0$

e) $f(x) = \begin{cases} x + a & \text{si } x < -1 \\ \arccos x & \text{si } -1 \le x \le 1 \end{cases}$ en $x = -1$

f) $f(x) = \begin{cases} E(x^2) + 1 & \text{si } x \le 2 \\ \dfrac{x^2 - a}{x - 2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ en $x = 2$

g) $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x < 0 \\ x - a & \text{si } 0 \le x < 1 \\ \dfrac{a}{x} + b & \text{si } 1 \le x \end{cases}$ en $x = 0$ y en $x = 1$

h) $f(x) = \begin{cases} 1/e^x & \text{si } x \le 0 \\ a\cos x + b & \text{si } 0 < x \le \pi \\ \text{sen}\, x - ax & \text{si } x > \pi \end{cases}$ en $x = 0$ y en $x = \pi$

a) $a = 1$

b) $a = 4$

c) $a = \dfrac{1}{2}$

d) a puede tomar cualquier valor real.

e) $a = \pi + 1$.

f) $a = 4$.

g) $a = 1$, $b = -1$

h) $a = \dfrac{-1}{\pi - 2}$ y $b = \dfrac{\pi - 1}{\pi - 2}$

42 **Halla *a* sabiendo que *f*: $[0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es continua en $[0, +\infty)$.**

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax} & \text{si } 0 \le x \le 8 \\ \dfrac{x^3 - 32}{x - 4} & \text{si } x > 8 \end{cases}$$

Sol: $a = 8$

43 **Calcula los valores de *a* y *b* para que la siguiente función sea continua para todo valor de *x*.**

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2a\cos x & \text{si } 0 \le x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si } \pi \le x \end{cases}$$

Sol: $a = 1$

$b = -2$

44 Calcula a para que $f(x) = \dfrac{-2x^2 + ax + 1}{2x^2 + 5x + 2}$ tenga en $x = -\dfrac{1}{2}$ una discontinuidad evitable. Estudia si presenta otra discontinuidad y clasifícala.

Sol: $a = 1$

En $x = -2$, la discontinuidad es asintótica.

45 Sea $f(x) = \dfrac{\text{sen}\,(1 + x)}{x^2 + ax + 2a}$ una función que tiene en $x = -1$ una discontinuidad evitable. Averigua el valor del parámetro a.

Sol: $a = -1$

46 Sea una función f tal que $f(x) > f(a)$, $\forall x \in E^*(a, \delta)$, con $\delta > 0$. Justifica si esto asegura que f es una función continua en $x = a$.

Sol: No

47 A partir del teorema de acotación, razona si la siguiente afirmación es correcta: «Si f no es una función continua en $x = a$, entonces no existe un entorno de a, $E(a, \delta)$, en que la función esté acotada.»

Sol: No

Continuidad de una función en un intervalo

48 Estudia la continuidad de las siguientes funciones en el intervalo que se indica.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \le 1 \\ 2 - x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en (0, 1) y [0, 1]

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x - 1}{x - 1} & \text{si } x < 2 \\ \ln(x - 1) & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$ en [0, 3]

c) $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^2 - 1}{e^x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$ en $[-\pi, 0]$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - 2^{1/x}} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$ en [−1, 0]

a) En el intervalo (0, 1), $f(x)$ es continua
Pero no es continua en [0, 1].

b) f no es continua en [0, 3].

c) La función no es continua en $[-\pi, 0]$.

d) f no es continua en [−1, 0].

49 La función $f(x) = \text{tg}\, x - x$ tiene un cero en $x = 0$. Por otro lado, $f(\pi) = -\pi < 0$ y $f(-\pi) = \pi > 0$. ¿Significa esto que $f(x)$ es continua en $[-\pi, \pi]$? Razona tu respuesta.

Sol: No.

50 Enuncia el teorema de Bolzano. Calcula, con un error menor de una décima, una raíz positiva del polinomio $x^3 + x - 1$.

Sol: $x = 0{,}6$.

51 Demuestra que la función $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ tiene un cero en el intervalo [1, 3].

52 Dada la ecuación $ax^5 + bx^3 + cx + d = 0$, ¿podemos asegurar que existe, al menos, una solución real?

Sol: Sí, salvo que $a = b = c = 0$.

53 Demuestra que toda función polinómica de tercer grado tiene, como mínimo, una raíz real.

54 Sea la función f cuyo dominio es $\mathbb{R}$, si $f(0) < 0$ y $f(3) > 0$, ¿podemos asegurar que en el intervalo (0, 3) existe un cero de la función? Razona tu respuesta.

Sol: No es posible afirmarlo.

55 Sea f una función definida en $[a, b]$, continua en $x = a$ y en $x = b$, y tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$. ¿Se puede aplicar a esta función el teorema de Bolzano?

Sol: No.

56 Justifica que la función $g(x) = -\dfrac{1}{\pi}x + \text{sen}\, x$ se anula en dos puntos del intervalo $[0, \pi]$. Aproxima estos puntos.

Sol: $g(0) = 0$.

existe $c \in \left(\dfrac{\pi}{6}, \pi\right)$, donde $g(c) = 0$.

57 Enuncia el teorema de Bolzano y determina si el polinomio $x^4 - 4x^2 - 1$ tiene alguna raíz real negativa.

58 Enuncia el teorema de Bolzano y utilízalo para demostrar que la ecuación $x^3 + x^2 - 7x + 1 = 0$ tiene una solución en el intervalo [0, 1].

59 Sea f una función continua en [−1, 1], donde $f(-1) = 5$ y $f(1) = 10$. Demuestra que existe algún número real, $c \in (-1, 1)$, tal que $f(c) = 7$.

60 Demuestra que existe al menos un número real, x, para el que se verifica $\text{sen}\, x = x - 2$.

61 Demuestra que las gráficas de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = 1/x$ se cortan en un punto $x > 0$.

62 Prueba que $x = \cos x$ tiene solución positiva.

63 Demuestra que $x \cos x + \text{sen}\, x = 1$ tiene alguna solución real.

64 Prueba que la ecuación $x^3 = 2^x$ tiene dos soluciones reales. Aproxímalas con una cifra decimal exacta.

Sol: $x = 1{,}4$; $x = 9{,}9$

65 Sea la función $f(x) = x^4 - x - 3$.

a) Razona por qué su gráfica corta en dos puntos el eje X.

b) Averigua, con una cifra decimal exacta, para qué valor $c \in \mathbb{R}^+$ es $f(c) = 0$.

b) $c = 1{,}5$.

66 Si una función está acotada en $[a, b]$, y $f(a) \cdot f(b) < 0$, ¿se puede asegurar que existe un valor $c \in (a, b)$, tal que $f(c) = 0$? Razona la respuesta.

Sol: No.

67 Di qué funciones están acotadas donde se indica:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ en [−1, 1]

b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x + 1}$ en [0, e]

c) $f(x) = \begin{cases} \text{sen}\, \dfrac{1}{x} & \text{si } x \ne 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ [−1, 1]

a) f no está acotada en [−1, 1].

b) f no está acotada en [0, e].

c) f está acotada en [−1, 1].

Ejercicios de aplicación

68 Construye gráficas de funciones que cumplan los siguientes requisitos.

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ Rec $f = \mathbb{R}$

$\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$f(0) = 0$

$f > 0$ en $(-\infty, -2) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$

$f < 0$ en $(-2, 0)$

b) Dom $f = \mathbb{R} - \{-2\}$ Rec $f = (-\infty, 4)$

$\lim_{x \to -2^-} f(x) = 4$ $\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

Asíntota horizontal por la izquierda: $y = 2$

Asíntota horizontal por la derecha: $y = 0$

Máximo relativo en $x = 0$

c) Dom $f = \mathbb{R}$

$f^{-1}(0) = \{-3, 1\}$ $f(-2) = -2$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = 0$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$

Mínimo relativo en $x = -1$

69 Dadas las funciones $f(x) = (x + 1)^2$, $g(x) = (x - 1)^2$ y $h(x) = 2x$, calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{h(x)}$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{g(x) - 1}$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) + g(x) - 2}{(h(x))^2}$

a) 1

b) -1

c) $\frac{1}{2}$

70 Sea la función $f(x) = \frac{x^2 - x}{3x^3 - x^2 - 2x}$. Determina su dominio de continuidad y clasifica sus discontinuidades. A continuación calcula el valor de $f(0)$ y de $f(1)$ para que f sea continua en el intervalo $[0, 1]$.

Sol: Es continua en $\mathbb{R} - \{-2/3, 0, 1\}$.

En $x = 0$ y en $x = 1$, la función tiene una discontinuidad evitable.

En $x = -2/3$, la discontinuidad es asintótica.

Para que sea continua en [0, 1], es preciso que se verifiquen:

$f(0) = \frac{1}{2}$

$f(1) = \frac{1}{5}$

71 Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} \ln x - 1 & \text{si } x > 1 \\ 2x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

Encuentra los valores de a y b para que la función sea continua y su gráfica pase por el origen de coordenadas.

Sol: $a = -3$ y $b = 0$.

72 Dada la función: $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x^3 + 2ax^2 + bx + 3}$

a) Determina a y b sabiendo que la función presenta una discontinuidad evitable en $x = 1$.

b) Define una función $g(x)$ que sea continua en $x = 1$ y que coincida en el dominio de definición de esta. Razona las respuestas.

a) $a = -4, b = 4$

b) $g(x) = \frac{-4 - 4x}{x^2 - 7x - 3}$

73 Calcula $f(0)$ para que la función $f(x) = 1 - x \operatorname{sen}(1/x)$ sea continua en el punto $x = 0$.

Sol: $f(0) = 1$

74 Di cuál de las siguientes afirmaciones es cierta y razona por qué:

a) Si una función f está acotada en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces es continua en dicho intervalo.

b) Si una función f no está acotada en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces no es continua en dicho intervalo.

Sol: Es cierta la segunda afirmación.

75 Sea f una función cuyo dominio es $\mathbb{R}$. Si f toma todos los valores comprendidos entre $f(-2)$ y $f(2)$, ¿se puede afirmar que la función f es continua en $[-2, 2]$?

Sol: No se puede afirmar.

76 Si una función f alcanza en el intervalo $[a, b]$ sus extremos absolutos, m y M, y toma en $[a, b]$ todos los valores comprendidos entre m y M, razona si esta condición es suficiente para asegurar que f es continua en $[a, b]$.

Sol: No es suficiente para garantizar la continuidad.

1. **Calcula el valor de los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{2x}{x^2-4} \right)$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \left(2 - \dfrac{x+1}{2} \right)^{\frac{1}{x-1}}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 - x - 1}{-3x^2 + 3x}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2+x}{2x-x^2} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+4x-2}}{1+x}$

g) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x - \sqrt{x}}}{1 - \sqrt{x}}$

h) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{x - \sqrt{x^2 - 2x}} \right)$

i) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(3 - \dfrac{2x^2+1}{x^2-1} \right)^{x - \sqrt{2x^2+1}}$

j) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\ln x^2 - 8}{x - 3}$

a) 0

b) $-\dfrac{1}{4}$

c) $e^{-\frac{1}{2}}$

d) -1

e) 0

f) $-\sqrt{3}$

g) $-\infty$

h) 0

i) 1

j) $+\infty$

2. **Estudia la continuidad de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{1}{1 + |x|}$ ***b)*** $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 1}{3 - 3x^2}$ ***c)*** $f(x) = \dfrac{1}{2 - 2x^{1/x}}$

a) $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) La función es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

c) La función es continua en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

3. **Encuentra los valores de *a* para que *f*(*x*) sea continua en el intervalo $[-2, -1]$.**

$$\begin{cases} x^2 - 2|x| - a & \text{si } x < -1 \\ (x-a)^2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

Sol: $a_1 = -1$ y $a_2 = -2$

4. **Aproxima la solución de la ecuación $x^2 e^x = 1$, con dos cifras decimales.**

Sol: 0,70

5. **Halla el valor de *a* para que la función esté acotada en el intervalo $[-1, 1]$.**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 + x + a & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Sol: $a = 0$