

7

LÍMITES DE FUNCIONES Y CONTINUIDAD

ACTIVIDADES

- 1** ■■■ Determina, si existe, el límite en $x = 2$ de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{si } x < 2 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Sol: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$

- 2** ■■■ Calcula, si existe, el límite en $x = 0$ de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Sol: $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

- 3** ■■■ Escribe la ecuación de la asíntota vertical de la función anterior.

Sol: $x = 0$.

- 4** ■■■ Dada la función $f(x) = \frac{3-x}{(x-1)^2}$, calcula $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Sol: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3-x}{(x-1)^2} = 3$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3-x}{(x-1)^2} = +\infty$

- 5** ■■■ Calcula: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+|x|}$

Sol: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

- 6** ■■■ Determina los límites laterales de la función

$$f(x) = \frac{|x+1|}{x+1} \text{ en } x = -1.$$

Sol: $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -1$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$

- 7** ■■■ Calcula, si las hay, las asíntotas verticales de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

d) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$

b) $f(x) = \operatorname{tg} x$

e) $f(x) = \ln x$

c) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

f) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$

a) $x = 1$ y $x = -1$.

b) $x = (2k+1) \cdot \pi/2, k \in \mathbb{Z}$

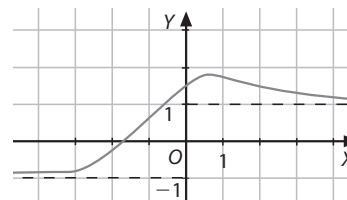
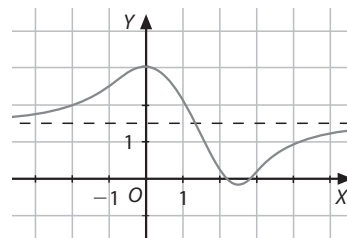
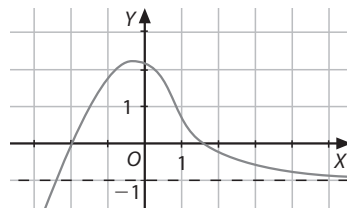
c) No tiene asíntotas verticales.

d) $x = 1$.

e) $x = 0$.

f) $x = 1$.

- 8** ■■■ Indica las asíntotas horizontales de las funciones de las figuras.



a) Por la derecha: $y = -1$

b) $y = 1,5$

c) Por la izquierda: $y = -1$, por la derecha: $y = 1$

- 9** ■■■ Halla las ecuaciones de las asíntotas horizontales de estas funciones.

a) $f(x) = \frac{1-2x^2}{x^2-1}$

d) $f(x) = \frac{1}{1-|x|}$

b) $f(x) = \frac{3x-1}{2x+1}$

e) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$

c) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3}$

f) $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+2}$

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -2$, asíntota horizontal $y = -2$.

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{3}{2}$, asíntota horizontal $y = \frac{3}{2}$.

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, asíntota horizontal $y = 0$.

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, asíntota horizontal $y = 0$.

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, asíntota horizontal $y = 1$, tanto si x tiende a $+\infty$ o a $-\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, asíntota horizontal por la izquierda $y = -1$, por la derecha $y = 1$.

10 ■■■ Construye gráficas que cumplan las siguientes condiciones.

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$, $\text{Rec } f = [-1, +\infty)$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $f(3) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$, $f^{-1}(0) = \{0, 2\}$

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0, 2\}$, $\text{Rec } f = (-\infty, 0) \cup \{1\} \cup (3, +\infty)$

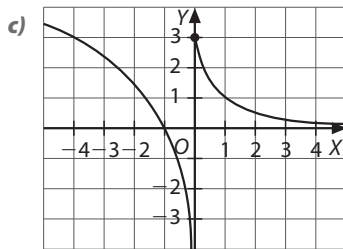
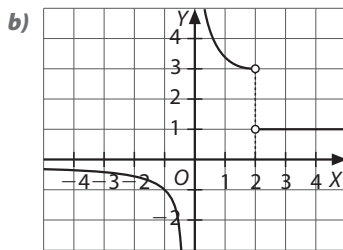
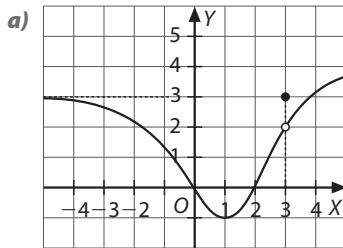
$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

(Ten en cuenta que $f(x) < 0$ si $x < 0$ y que $f(x) > 0$ si $x > 0$.)

c) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$, $\text{Rec } f = \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$



11 ■■■ Resuelve cada uno de los límites siguientes por el método que consideres más adecuado.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2/x}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 5x} - x$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x} - (x - 2)}{x - 2}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{\sqrt{x^2 + 5x} - x}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^2 + 1}{5x^2 - 2} \right)^{\frac{x-1}{2}}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1-x} - 1}$

g) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2}$

m) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(2x-6)^2}{\sqrt{2x} - \sqrt{6}}$

h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

n) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 6}{\sqrt{2x} - \sqrt{6}}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{2}}{x^2 + x - 2}$

ñ) $\lim_{x \rightarrow 1/2} e^{\frac{1}{2x-1}}$

j) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x\sqrt{x}}{1 - x^2}$

o) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x} + 3x}{2^x}$

k) $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\ln(4x-1)}{2x-1}$

p) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \text{sen } x)^{\frac{2}{\text{tg } x}}$

l) $\lim_{x \rightarrow 0} (2x + 1)^{1/x}$

q) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x^2 + 1)}{2x}$

a) 1

j) $\frac{3}{4}$

b) 0

k) 2

c) $+\infty$

l) e^2

d) $5\sqrt{2} - 5$

m) 0

e) 1

n) $2\sqrt{6}$

f) -2

ñ) $\sqrt{2}$

g) $\frac{1}{4}$

o) $+\infty$

h) 3

p) e^2

i) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

q) 0

12 ■■■ Estudia la continuidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

a) $f(x) = E(x)$, en $x = \frac{2}{3}$ y en $x = 1$.

b) $f(x) = \frac{2-x}{x^2 - 2x}$, en $x = 0$ y en $x = 2$.

c) $f(x) = 4 - \ln x$, en $x = 0$ y en $x = 4$.

b) $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$, en $x = 0$.

a) En $x = \frac{2}{3}$ es continua; en $x = 1$ no es continua.

b) No es continua.

c) En $x = 0$ no es continua, en $x = 4$ es continua.

d) No es continua.

13 ■■■ Indica en qué casos es posible salvar la discontinuidad en las funciones de la actividad anterior.

Sol: En **b)** se puede salvar la discontinuidad en el punto $x = 2$ imponiendo $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1/2$.

En **d)** imponiendo $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

14 ■■■ Estudia la continuidad de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \frac{3x^2 - x}{x^3 - 1}$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2-x}}{x}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \frac{1}{1 + e^{1/x}}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

f) $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{\text{sen } x}$

a) Es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$.

b) Es continua.

c) Es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

d) Es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, 2)$.

e) Es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

f) Es continua en $\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

- 15 ■■■ Estudia para qué valores de a son continuas en \mathbb{R} estas funciones.

$$a) f(x) = \begin{cases} ax^3 - 3x^2 + ax + 2 & \text{si } x < \\ (1-a)x^2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{1+|x|}{1-x} & \text{si } x < -1 \\ a & \text{si } x = -1 \\ \frac{-2+2\sqrt{x+2}}{x+1} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} 1+a^x & \text{si } x \leq 0 \\ \ln(x^2+a) & \text{si } x > 0 \ (a > 0) \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} \frac{(x+1)^2-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- a) -3.
b) 1
c) e^2
d) 2

- 16 ■■■ Clasifica las discontinuidades de la función.

$$f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|}$$

Sol: Discontinuidad evitable en $x = 0$.

Discontinuidad asintótica en $x = -1$.

Discontinuidad asintótica en $x = 1$.

- 17 ■■■ Clasifica las discontinuidades de las funciones de la actividad 14. Cuando la discontinuidad sea evitable, calcula el valor que debe asignarse a la función para salvar la discontinuidad.

- a) En $x = 1$, discontinuidad asintótica.
b) No hay discontinuidades.
c) En $x = -1$, discontinuidad de salto.
d) En $x = 0$, discontinuidad evitable: si $f(0) = \frac{\sqrt{2}}{4}$, f es continua en $(-\infty, 2)$.
e) En $x = 0$, discontinuidad de salto.
f) En $x = 0$, discontinuidad evitable: si $f(0) = 0$, f es continua en $x = 0$. Las otras discontinuidades son asintóticas.

- 18 ■■■ Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - x - b}{2x^3 - ax - 2x}$ averigua a y b

sabiendo que en $x = 2$ la función presenta una discontinuidad evitable. A continuación, calcula y clasifica las demás discontinuidades.

Sol: $b = 2$ $a = 3$

En $x = 0$, discontinuidad asintótica.

En $x = -\frac{1}{2}$, discontinuidad asintótica.

- 19 ■■■ Razona si la función $f(x) = \operatorname{tg} x$ tiene algún cero en un punto interior del intervalo cerrado $[0, \pi]$.

Sol: No se puede asegurar que tenga algún cero.

- 20 ■■■ Precisa hasta las centésimas la solución de la ecuación $x^3 - 2x + 1 = 0$ en $[-2, -1]$.

Sol: $x = -1,62$

- 21 ■■■ Resuelve las siguientes cuestiones:

- a) Demuestra que al menos existe un número real distinto de 0 para el cual se verifica la ecuación $x^2 + e^x = 1 - \operatorname{sen} x$.
b) Determina un intervalo de longitud 0,1 en el que esté comprendida una solución de la ecuación $2x + 1 = \operatorname{sen} x$.
b) $(-0,9; -0,8)$.

- 22 ■■■ La ecuación $(x+1)^{\ln x} = 5$ tiene una solución en el intervalo $[3, 4]$. Hállala con dos cifras decimales exactas. (La función $f(x) = (x+1)^{\ln x}$ es continua en \mathbb{R}^+ .)

Sol: $x = 3,11$.

- 23 ■■■ Sea f una función que toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$. ¿Significa esto que la función es continua en $[a, b]$? Para reflexionar sobre esta pregunta, ayúdate de una representación gráfica.

Sol: No necesariamente.

- 24 ■■■ Dada la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+2x^2)}{x^2-3x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Calcula el valor del parámetro a para que la función tome todos los valores comprendidos entre $f(-1)$ y $f(1)$.

Sol: $a = 2$.

- 25 ■■■ Sea f una función acotada en el intervalo $[a, b]$. ¿Significa esto que f es continua en $[a, b]$? Ayúdate de una representación gráfica.

Sol: No necesariamente.

- 26 ■■■ Si f es una función acotada en $[a, b]$ y no es continua en dicho intervalo, ¿qué tipo de discontinuidades puede presentar en $[a, b]$?

Sol: Discontinuidades evitables, de salto o esenciales no asintóticas.

Ejercicios y problemas

Cálculo de límites

- 27 ■■■ Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x^2 + 5}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{2x^2 - 2x - 4}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 1}{(x - 2)^2}$

e) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x + 1}{x + 2}$

f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 - x + 6}{(x - 2)^2 x}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - x}{x^3}$

h) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}$

- a) 0 e) ∞
b) 12 f) ∞
c) $\frac{2}{3}$ g) ∞
d) $+\infty$ h) 0

28 ■■■ Halla los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x+2}{x-2} - \frac{6x+4}{x^2-4} \right)$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+3}{x-1} \cdot \frac{x^2+x-2}{x^2-3} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 1/2} \left(\frac{2x+1}{2x+2} \right)^{\frac{2x-1}{\sqrt{2x-1}}}$ d) $\lim_{x \rightarrow 1/3} \left(\frac{2}{1-x} \right)^{\frac{x}{3x-1}}$

- a) $\frac{1}{2}$ b) -6
c) 1 d) $\frac{1}{2}$

29 ■■■ Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{x+1}}$ d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 4x - 6}{3 - \sqrt{6+x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{2x}$ e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - \sqrt{x}}$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x+3}{\sqrt{5x^2+x}}$ f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$

- a) -2 d) -48
b) $\frac{1}{8}$ e) 0
c) 0 f) $\frac{1}{4}$

30 ■■■ Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + x^2 - x + 1)$ e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 4x}}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + x^2 - x + 1)$ f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 4x}}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4 - x^2}$ g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2x^4 + 3}}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x^2 + x - 2}{x^4 - x^2}$

- a) $-\infty$ e) $\sqrt{2}$
b) $+\infty$ f) $-\sqrt{2}$
c) $\frac{1}{2}$
d) 0 g) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

31 ■■■ Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{4x^2 + 1} - (2x + 1)]$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{4x^2 + 1} - (2x + 1)]$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{x^2 + x} \right)^{\sqrt{x^2+1}-x}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{x^2 + x} \right)^{\sqrt{x^2+1}-x}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x - 1} - x)$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x - 1} - x)$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}}{x}$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}}{x}$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{2+x} - \sqrt{x})$

j) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + \sqrt{2+x}}{x+1}$

- a) -1 f) $+\infty$
b) $+\infty$ g) 0
c) 1 h) 0
d) $+\infty$ i) 1
e) 1 j) $\frac{3}{2}$

32 ■■■ Estudia el comportamiento de la siguiente función en los extremos de su dominio: $f(x) = |2 - 2^x|$

Sol:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Hay una asíntota horizontal por la izquierda, $y = 2$.

33 ■■■ Calcula los límites cuando $x \rightarrow -1$ y $x \rightarrow 0$ de la siguiente función y encuentra sus asíntotas.

$$f(x) = \frac{x^2 + |x|}{|x^2 + x|}$$

Sol: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$

Por tanto, $x = -1$ es una asíntota vertical.

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$

Por consiguiente, $y = 1$ es una asíntota horizontal.

34 ■■■ Calcula los límites siguientes.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4x - 5}{x + 1} \right)^{\frac{x^2-1}{(x-2)^2}}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{\sqrt{2x^2+1}-x}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x} - \frac{x^3 - x^2 - x + 2}{x^2} \right)^{\frac{3-x^2}{x}}$

- a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) e^{-2}

35 ■■■ Calcula el valor de a para que se verifiquen las siguientes igualdades.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3ax^3 - 2ax^2 + ax - 1}{x^2 - 6x^3} = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x^2 + ax} - \sqrt{2x^2 + 1}) = \sqrt{2}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + ax + 2}{x^2 - 2x} \right)^{\frac{3x^2-1}{x}} = \frac{1}{e^3}$

- a) $a = -2$
b) $a = 4$
c) $a = -3$

Continuidad de una función en un punto

36 ■■■ Estudia la continuidad de las siguientes funciones y clasifica sus discontinuidades.

a) $f(x) = \ln|x+1|$

h) $f(x) = 2^{\lg x}$

b) $f(x) = \frac{x+1}{2x^2+x-1}$

i) $f(x) = \frac{x^2+1}{2x^2(x+1)}$

c) $f(x) = \frac{|2x+1|}{2x^2-x-1}$

j) $f(x) = \frac{2^{1/x}}{1+x}$

d) $f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3}$

k) $f(x) = \frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}$

e) $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$

l) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$

f) $f(x) = \frac{1}{1-e^x}$

m) $f(x) = \frac{|x|-1}{x^2-|x|}$

g) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$

n) $f(x) = \frac{\arctg x}{\ln x}$

a) La función es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$. La discontinuidad en $x = -1$ es asíntota.

b) La función es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1/2\}$.

En $x = -1$, la discontinuidad es evitable.

En $x = 1/2$, la discontinuidad es asíntota.

c) La función es continua en $\mathbb{R} - \{-1/2, 1\}$.

En $x = -1/2$, la función presenta una discontinuidad de salto.

En $x = 1$, la función presenta una discontinuidad asíntota.

d) La función es continua en $\mathbb{R} - \{2, -3\}$.

La discontinuidad es asíntota en ambos puntos.

e) La función es continua en \mathbb{R} .

f) La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

En $x = 0$, la función presenta una discontinuidad asíntota.

g) La función es continua en $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

La recta de ecuación $x = -1$ es una asíntota vertical de la función.

En $x = 0$, la función presenta una discontinuidad evitable.

h) Es continua en $\mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$

En los puntos de abscisa $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, la función presenta una discontinuidad esencial, asíntota por la izquierda.

i) Es continua en $\mathbb{R} - \{0, -1\}$.

En $x = 0$ y en $x = -1$ la discontinuidad es asíntota.

j) Es una función continua en $\mathbb{R} - \{0, -1\}$.

En $x = 0$, la función presenta una discontinuidad esencial, asíntota por la derecha.

En $x = -1$, la discontinuidad es asíntota.

k) Es una función continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

En $x = 0$, la función presenta una discontinuidad asíntota.

l) Es continua en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

En $x = 1$, la discontinuidad es asíntota.

En $x = 0$ la función no está definida por la izquierda.

No hay asíntota en $x = 0$.

m) Es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$. En $x = 1$ y $x = -1$ hay discontinuidades evitables.

En $x = 0$, la función presenta una discontinuidad asíntota.

n) Es continua en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

En $x = 0$, la función no está definida por la izquierda.

En $x = 0$ no existe asíntota.

En $x = 1$ la función presenta una discontinuidad asíntota.

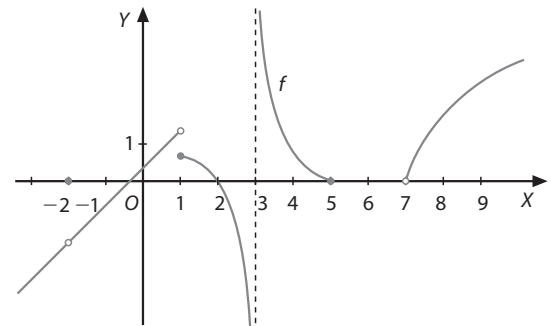
37 ■■■ Determina en qué casos es posible salvar la discontinuidad, cuando existan, en cada una de las funciones de la actividad anterior.

Sol: En la función de la actividad 10. b) se puede evitar la discontinuidad en $x = -1$, imponiendo que $f(-1) = -1/3$.

En la función de la actividad 10. g) se puede evitar la discontinuidad en el punto $x = 0$, imponiendo que $f(0) = 1$.

En la función de la actividad 10. m) se puede evitar la discontinuidad en $x = -1$, tomando $f(-1) = 1$, y también en $x = 1$, tomando $f(1) = 1$.

38 ■■■ A partir de su representación gráfica, clasifica las discontinuidades de la función f:



Sol:

Discontinuidad evitable: $x = -2$

Discontinuidad de salto: $x = 1$

Discontinuidad asíntota: $x = 3$

Discontinuidad esencial no asíntota: $x = 5$ y $x = 7$

39 ■■■ Averigua, en cada uno de los siguientes casos, el valor que debe tomar la función en el punto indicado para que sea continua en él.

a) $f(x) = \frac{2x^2+x-1}{3-3x^2}$ en $x = -1$

b) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$ en $x = 1$

c) $f(x) = \frac{2-\sqrt{4-x}}{3x}$ en $x = 0$

d) $f(x) = \left(2 - \frac{2}{x+1}\right)^{\frac{1}{x-1}}$ en $x = 0$

e) $f(x) = \frac{2-2\sqrt{x+2}}{x+1}$ en $x = -1$

f) $f(x) = \left(\frac{x^2+x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}$ en $x = 1$

g) $f(x) = \frac{1}{1+e^{-1/x^2}}$ en $x = 0$

$$a) \frac{-1}{2}$$

$$b) \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$c) \frac{1}{12}$$

d) En $x = 0$ la función presenta una discontinuidad esencial que no es posible evitar.

$$e) -1$$

$$f) \sqrt[4]{e^3}$$

$$g) 1$$

40 ■■■ Estudia la continuidad de las siguientes funciones y clasifica sus discontinuidades.

$$a) f(x) = \begin{cases} 3^x & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{2}{4-x^2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x < 1 \\ 1/2 & \text{si } x = 1 \\ -(x-1)^2 + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} 1 + 2^{1/x} & \text{si } x < 0 \\ |x^2 - x + 1| & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} \ln|x-1| & \text{si } x < 0 \\ \frac{|x-2|}{x-2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$e) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{e^x}{e^x - 1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$f) f(x) = \begin{cases} \frac{5 - \sqrt{25-x}}{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x + \ln(x+1)}{20x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Para $x < 2$ la función es continua.

Para $x > 2$, la función es continua.

f tiene en $x = 2$ una discontinuidad esencial, con una asíntota vertical por la derecha.

b) Para $x < 1$, la función es continua.

Para $x > 1$, la función es continua.

La discontinuidad en $x = 1$ es de salto finito.

c) La función es continua en \mathbb{R} .

d) La discontinuidad en $x = 0$ es de salto.

En $x = 2$ la discontinuidad también es de salto.

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0, 2\}$.

e) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

La discontinuidad en $x = 0$ es asíntotica.

f) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

La discontinuidad es evitable en $x = 0$.

41 ■■■ Estudia para qué valores de a , o de a y b , son continuas estas funciones en los puntos que se indican.

$$a) f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3-ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{en } x = 1$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-a}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ a & \text{si } x = 2 \end{cases} \quad \text{en } x = 2$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax}}{x+2} & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 2ax + a & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0$$

$$d) f(x) = \begin{cases} 5 + 2\text{sen } x & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0$$

$$e) f(x) = \begin{cases} x+a & \text{si } x < -1 \\ \text{arc cos } x & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{en } x = -1$$

$$f) f(x) = \begin{cases} E(x^2) + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{x^2-a}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \text{en } x = 2$$

$$g) f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x < 0 \\ x-a & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{a}{x} + b & \text{si } 1 \leq x \end{cases} \quad \text{en } x = 0 \text{ y en } x = 1$$

$$h) f(x) = \begin{cases} 1/e^x & \text{si } x \leq 0 \\ a \cos x + b & \text{si } 0 < x \leq \pi \\ \text{sen } x - ax & \text{si } x > \pi \end{cases} \quad \text{en } x = 0 \text{ y en } x = \pi$$

$$a) a = 1$$

$$b) a = 4$$

$$c) a = \frac{1}{2}$$

d) a puede tomar cualquier valor real.

$$e) a = \pi + 1.$$

$$f) a = 4.$$

$$g) a = 1, b = -1$$

$$h) a = \frac{-1}{\pi-2} \text{ y } b = \frac{\pi-1}{\pi-2}$$

42 ■■■ Halla a sabiendo que $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[0, +\infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax} & \text{si } 0 \leq x \leq 8 \\ \frac{x^3-32}{x-4} & \text{si } x > 8 \end{cases}$$

Sol: $a = 8$

43 ■■■ Calcula los valores de a y b para que la siguiente función sea continua para todo valor de x .

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2a \cos x & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si } \pi \leq x \end{cases}$$

Sol: $a = 1$

$b = -2$

- 44 Calcula a para que $f(x) = \frac{-2x^2 + ax + 1}{2x^2 + 5x + 2}$ tenga en $x = -\frac{1}{2}$ una discontinuidad evitable. Estudia si presenta otra discontinuidad y clasifícala.

Sol: $a = 1$

En $x = -2$, la discontinuidad es asintótica.

- 45 Sea $f(x) = \frac{\text{sen}(1+x)}{x^2 + ax + 2a}$ una función que tiene en

$x = -1$ una discontinuidad evitable. Averigua el valor del parámetro a .

Sol: $a = -1$

- 46 Sea una función f tal que $f(x) > f(a)$, $\forall x \in E^*(a, \delta)$, con $\delta > 0$. Justifica si esto asegura que f es una función continua en $x = a$.

Sol: No

- 47 A partir del teorema de acotación, razona si la siguiente afirmación es correcta: «Si f no es una función continua en $x = a$, entonces no existe un entorno de a , $E(a, \delta)$, en que la función esté acotada.»

Sol: No

Continuidad de una función en un intervalo

- 48 Estudia la continuidad de las siguientes funciones en el intervalo que se indica.

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \leq 1 \\ 2 - x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{en } (0, 1) \text{ y } [0, 1]$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x - 1}{x - 1} & \text{si } x < 2 \\ \ln(x - 1) & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{en } [0, 3]$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2 - 1}{e^x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{en } [-\pi, 0]$$

$$d) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 - 2^{1/x}} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{en } [-1, 0]$$

a) En el intervalo $(0, 1)$, $f(x)$ es continua

Pero no es continua en $[0, 1]$.

b) f no es continua en $[0, 3]$.

c) La función no es continua en $[-\pi, 0]$.

d) f no es continua en $[-1, 0]$.

- 49 La función $f(x) = \text{tg } x - x$ tiene un cero en $x = 0$. Por otro lado, $f(\pi) = -\pi < 0$ y $f(-\pi) = \pi > 0$. ¿Significa esto que $f(x)$ es continua en $[-\pi, \pi]$? Razona tu respuesta.

Sol: No.

- 50 Enuncia el teorema de Bolzano. Calcula, con un error menor de una décima, una raíz positiva del polinomio $x^3 + x - 1$.

Sol: $x = 0,6$.

- 51 Demuestra que la función $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ tiene un cero en el intervalo $[1, 3]$.

- 52 Dada la ecuación $ax^5 + bx^3 + cx + d = 0$, ¿podemos asegurar que existe, al menos, una solución real?

Sol: Sí, salvo que $a = b = c = 0$.

- 53 Demuestra que toda función polinómica de tercer grado tiene, como mínimo, una raíz real.

- 54 Sea la función f cuyo dominio es \mathbb{R} , si $f(0) < 0$ y $f(3) > 0$, ¿podemos asegurar que en el intervalo $(0, 3)$ existe un cero de la función? Razona tu respuesta.

Sol: No es posible afirmarlo.

- 55 Sea f una función definida en $[a, b]$, continua en $x = a$ y en $x = b$, y tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$. ¿Se puede aplicar a esta función el teorema de Bolzano?

Sol: No.

- 56 Justifica que la función $g(x) = -\frac{1}{\pi}x + \text{sen } x$ se anula en dos puntos del intervalo $[0, \pi]$. Aproxima estos puntos.

Sol: $g(0) = 0$.

existe $c \in \left(\frac{\pi}{6}, \pi\right)$, donde $g(c) = 0$.

- 57 Enuncia el teorema de Bolzano y determina si el polinomio $x^4 - 4x^2 - 1$ tiene alguna raíz real negativa.

- 58 Enuncia el teorema de Bolzano y utilízalo para demostrar que la ecuación $x^3 + x^2 - 7x + 1 = 0$ tiene una solución en el intervalo $[0, 1]$.

- 59 Sea f una función continua en $[-1, 1]$, donde $f(-1) = 5$ y $f(1) = 10$. Demuestra que existe algún número real, $c \in (-1, 1)$, tal que $f(c) = 7$.

- 60 Demuestra que existe al menos un número real, x , para el que se verifica $\text{sen } x = x - 2$.

- 61 Demuestra que las gráficas de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = 1/x$ se cortan en un punto $x > 0$.

- 62 Prueba que $x = \cos x$ tiene solución positiva.

- 63 Demuestra que $x \cos x + \text{sen } x = 1$ tiene alguna solución real.

- 64 Prueba que la ecuación $x^3 = 2^x$ tiene dos soluciones reales. Aproxímalas con una cifra decimal exacta.

Sol: $x = 1,4$; $x = 9,9$

- 65 Sea la función $f(x) = x^4 - x - 3$.

a) Razona por qué su gráfica corta en dos puntos el eje X .

b) Averigua, con una cifra decimal exacta, para qué valor $c \in \mathbb{R}^+$ es $f(c) = 0$.

b) $c = 1,5$.

- 66 Si una función está acotada en $[a, b]$, y $f(a) \cdot f(b) < 0$, ¿se puede asegurar que existe un valor $c \in (a, b)$, tal que $f(c) = 0$? Razona la respuesta.

Sol: No.

- 67 Di qué funciones están acotadas donde se indica:

a) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ en $[-1, 1]$

b) $f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$ en $[0, e]$

c) $f(x) = \begin{cases} \text{sen } \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad [-1, 1]$

a) f no está acotada en $[-1, 1]$.

b) f no está acotada en $[0, e]$.

c) f está acotada en $[-1, 1]$.

Ejercicios de aplicación

68 Construye gráficas de funciones que cumplan los siguientes requisitos.

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ Rec $f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f > 0 \text{ en } (-\infty, -2) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$$

$$f < 0 \text{ en } (-2, 0)$$

b) Dom $f = \mathbb{R} - \{-2\}$ Rec $f = (-\infty, 4)$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 4 \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$$

Asíntota horizontal por la izquierda: $y = 4$

Asíntota horizontal por la derecha: $y = 0$

Máximo relativo en $x = 0$

c) Dom $f = \mathbb{R}$

$$f^{-1}(0) = \{-3, 1\} \quad f(-2) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$$

Mínimo relativo en $x = -1$

69 Dadas las funciones $f(x) = (x + 1)^2$, $g(x) = (x - 1)^2$ y $h(x) = 2x$, calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{h(x)}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{g(x) - 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + g(x) - 2}{(h(x))^2}$

a) 1

b) -1

c) $\frac{1}{2}$

70 Sea la función $f(x) = \frac{x^2 - x}{3x^3 - x^2 - 2x}$. Determina su dominio de continuidad y clasifica sus discontinuidades. A continuación calcula el valor de $f(0)$ y de $f(1)$ para que f sea continua en el intervalo $[0, 1]$.

Sol: Es continua en $\mathbb{R} - \{-2/3, 0, 1\}$.

En $x = 0$ y en $x = 1$, la función tiene una discontinuidad evitable.

En $x = -2/3$, la discontinuidad es asíntótica.

Para que sea continua en $[0, 1]$, es preciso que se verifiquen:

$$f(0) = \frac{1}{2}$$

$$f(1) = \frac{1}{5}$$

71 Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} \ln x - 1 & \text{si } x > 1 \\ 2x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

Encuentra los valores de a y b para que la función sea continua y su gráfica pase por el origen de coordenadas.

Sol: $a = -3$ y $b = 0$.

72 Dada la función: $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x^3 + 2ax^2 + bx + 3}$

a) Determina a y b sabiendo que la función presenta una discontinuidad evitable en $x = 1$.

b) Define una función $g(x)$ que sea continua en $x = 1$ y que coincida en el dominio de definición de esta. Razona las respuestas.

a) $a = -4, b = 4$

b) $g(x) = \frac{-4 - 4x}{x^2 - 7x - 3}$

73 Calcula $f(0)$ para que la función $f(x) = 1 - x \operatorname{sen}(1/x)$ sea continua en el punto $x = 0$.

Sol: $f(0) = 1$

74 Di cuál de las siguientes afirmaciones es cierta y razona por qué:

a) Si una función f está acotada en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces es continua en dicho intervalo.

b) Si una función f no está acotada en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces no es continua en dicho intervalo.

Sol: Es cierta la segunda afirmación.

75 Sea f una función cuyo dominio es \mathbb{R} . Si f toma todos los valores comprendidos entre $f(-2)$ y $f(2)$, ¿se puede afirmar que la función f es continua en $[-2, 2]$?

Sol: No se puede afirmar.

76 Si una función f alcanza en el intervalo $[a, b]$ sus extremos absolutos, m y M , y toma en $[a, b]$ todos los valores comprendidos entre m y M , razona si esta condición es suficiente para asegurar que f es continua en $[a, b]$.

Sol: No es suficiente para garantizar la continuidad.

1. Calcula el valor de los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}}{2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{2x}{x^2-4} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(2 - \frac{x+1}{2} \right)^{\frac{1}{x-1}}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{-3x^2 + 3x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + x}{2x - x^2} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

a) 0

b) $-\frac{1}{4}$

c) $e^{\frac{1}{2}}$

d) -1

e) 0

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 4x - 2}}{1 + x}$

g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x - \sqrt{x}}}{1 - \sqrt{x}}$

h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 2x}} \right)$

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x - \sqrt{2x^2 + 1}}$

j) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln x^2 - 8}{x - 3}$

f) $-\sqrt{3}$

g) $-\infty$

h) 0

i) 1

j) $+\infty$

2. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{1 + |x|}$

b) $f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{3 - 3x^2}$

c) $f(x) = \frac{1}{2 - 2x^{1/x}}$

a) $f(x)$ es continua en todo \mathbb{R} .

b) La función es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

c) La función es continua en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

3. Encuentra los valores de a para que $f(x)$ sea continua en el intervalo $[-2, -1]$.

$$\begin{cases} x^2 - 2|x| - a & \text{si } x < -1 \\ (x - a)^2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

Sol: $a_1 = -1$ y $a_2 = -2$

4. Aproxima la solución de la ecuación $x^2 e^x = 1$, con dos cifras decimales.

Sol: 0,70

5. Halla el valor de a para que la función esté acotada en el intervalo $[-1, 1]$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 + x + a & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Sol: $a = 0$