Descomposición en fracciones simples

Dados f y g polinomios consideramos su cociente $\frac{f}{g}$ que llamamos *función racional*. Queremos descomponerla en *fracciones simples* que sabemos integrar.

Una *fracción simple* es una expresión de la forma

$$\frac{A}{(x-a)^n} \quad \text{o} \quad \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

donde en el segundo caso se cumple $b^2 - 4c < 0$.

Si gr $f \geq$ gr g, entonces podemos **simplificar el cociente** $\frac{f}{g}$ haciendo la división de f por g, quedándonos entonces

$$\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{g(x)}$$

donde Q es un polinomio y R es un polinomio de grado menor que g. Por lo tanto reducimos la descomposición en fracciones simples al caso $\frac{f}{g}$ donde gr $f <$ gr g. A partir de ahora suponemos gr f $<$ gr g.

Admitiremos que toda función racional $\frac{f}{g}$ con gr f $<$ gr g admite una única descomposición en suma de fracciones simples.

Para hallar la descomposición, **factorizamos el denominador** dejándolo en su forma más reducida. Para seguir con la descomposición tenemos que distinguir en casos:

Primer caso: *El denominador es producto de funciones lineales*[1] *diferentes.* Por ejemplo, si es producto de tres funciones lineales diferentes $x - x_1, x - x_2, x - x_3$ donde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ son constantes, debemos hacer

$$\frac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3}$$

donde $A, B, C \in \mathbb{R}$ son constantes que debemos determinar. Para determinarlas, hacemos denominador común en la expresión de la derecha, y por igualdad de polinomios nos queda un sistema de ecuaciones lineales. En este caso concreto queda un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (A, B y C). Resolviendo el sistema hallamos A, B y C y la expresión en fracciones simples queda lista. Sabemos integrar los sumandos mediante logaritmos. Un ejemplo:

$$\begin{aligned}\frac{x^2+3x+1}{(x-1)(x+1)(x+2)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} \\ &= \frac{(A+B+C)x^2 + (3A+B)x + 2A - 2B - C}{(x-1)(x+1)(x+2)}\end{aligned}$$

[1] Una función lineal es un polinomio de grado 1.

Dado que los numeradores son iguales, es una igualdad entre polinomios $x^2 + 3x + 1 = (A + B + C)x^2 + (3A + B)x + 2A - 2B - C$. Por lo tanto los coeficientes de mismo grado deben ser iguales. Resolvemos el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} A + B + C = 1 \\ 3A + B = 3 \\ 2A - 2B - C = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} A = \frac{5}{6} \\ B = \frac{1}{2} \\ C = -\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

Por lo tanto

$$\frac{x^2 + 3x + 1}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{5}{6(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{3(x+2)}$$

y entonces el cálculo de la integral queda

$$\int \frac{x^2 + 3x + 1}{(x-1)(x+1)(x+2)}\, dx = \frac{5}{6}\log|x-1| + \frac{1}{2}\log|x+1| - \frac{1}{3}\log|x+2|$$

Segundo caso: *El denominador es producto de funciones lineales al menos una de las cuales se repite.* Por ejemplo, si es producto de dos iguales con una tercera, debemos hacer:

$$\frac{f(x)}{(x-x_1)^2(x-x_2)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{(x-x_1)^2} + \frac{C}{x-x_2}$$

Análogamente al caso anterior, hacemos denominador común en la expresión de la derecha y por igualdad de polinomios encontramos A, B y C y la expresión en fracciones simples queda lista. Sabemos integrar los sumandos mediante logaritmos y la expresión $\int x^p\, dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}$ para $p \neq -1$.

Tercer caso: *El denominador es producto de funciones lineales y al menos una función cuadrática*[2] *ninguna de las cuales se repite.* Se procede similarmente al primer caso, sólo que en los numeradores de los factores cuadráticos tenemos que poner una función lineal en vez de una constante. Por ejemplo:

$$\frac{f(x)}{(x-1)(x^2+x+1)(x^2+x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2+x+1} + \frac{Cx + D}{x^2+x+2}$$

donde $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ son constantes que debemos determinar. Para determinarlas, hacemos denominador común en la expresión de la derecha, y por igualdad de polinomios nos queda un sistema de ecuaciones lineales. En este caso concreto queda un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas (A, B, C y D). Resolviendo el sistema hallamos A, B, C y D, y la expresión en fracciones simples queda lista. Puede haber una complicación para hallar las integrales de los miembros cuyo numerador tiene una función lineal. A veces conviene *completar el cuadrado* en el

[2] Una función cuadrática es un polinomio de grado 2.

denominador. Un ejemplo de cálculo de integrales:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+3}{x^2+x+1} &= \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \int \frac{2}{x^2+x+1} \\ &= \log(x^2+x+1) + 2\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \\ &= \log(x^2+x+1) + \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

La primera igualdad es una astucia que resulta de observar que el numerador es *casi* la derivada del denominador, por lo tanto partimos en dos integrales, y en la primera efectivamente el numerador es la derivada del denominador. En el segundo término completamos el cuadrado para llevar el integrando a la forma $\frac{1}{u^2+a^2}$; en este caso $u = x + \frac{1}{2}$ y $a = \sqrt{\frac{3}{4}}$. Finalmente, $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a}$ via la sustitución $t = \frac{u}{a}$.

Cuarto caso: *El denominador es producto de funciones lineales y al menos una función cuadrática, y al menos uno de los factores se repite.* Se procede similarmente al segundo caso, sólo que en los numeradores de los factores cuadráticos tenemos que poner una función lineal en vez de una constante. Por ejemplo:

$$\frac{f(x)}{(x-1)^2(x^2+2)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2} + \frac{Ex+F}{(x^2+2)^2} + \frac{Gx+H}{(x^2+2)^3}$$

donde $A, B, C, D, E, F, G, H \in \mathbb{R}$ son constantes que debemos determinar. Para determinarlas, hacemos denominador común en la expresión de la derecha, y por igualdad de polinomios nos queda un sistema de ecuaciones lineales. En este caso concreto queda un sistema de ocho ecuaciones con ocho incógnitas. Resolviendo el sistema hallamos las incógnitas, y la expresión en fracciones simples queda lista. Un ejemplo de descomposición:

$$\frac{2x^6-x^5+x^4+2x^2-1}{(x-1)^2(x^2+2)^3} = \frac{1}{3(x-1)} + \frac{1}{9(x-1)^2} + \frac{14-3x}{9(x^2+2)} + \frac{16x-41}{9(x^2+2)^2} + \frac{11-10x}{3(x^2+2)^3}$$

Esto es, $A = \frac{1}{3}, B = \frac{1}{9}, C = \frac{14}{9}, D = \frac{-3}{9}, E = \frac{16}{9}, F = \frac{-41}{9}, G = \frac{11}{3}, H = \frac{-10}{3}$.