Opción A

Ejercicio 1 opción A, Septiembre 2018 (modelo 4)

[2'5 puntos] Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - sen(x)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Determina a, b y c sabiendo que f es continua, alcanza su máximo relativo en x = -1 y la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = -2 tiene pendiente 2.

Solución

Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - sen(x)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Determina a, b y c sabiendo que f es continua, alcanza su máximo relativo en x = -1 y la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = -2 tiene pendiente 2.

Vemos que los valores x = -1 y x = -2 están en la rama x ≤ 0, con lo cual $f(x) = ax^2 + bx + c$ y f '(x) = 2ax + b.

Como en x = -1 hay un máximo relativo, tenemos f '(-1) = 0.

Como en x = -2 la recta tangente a la gráfica de f tiene pendiente 2, tenemos f '(-2) = 2.

De f '(-1) = 0, resulta f '(-1) = 2a(-1) + b = 0, de donde b = 2a.

De f '(-2) = 2, resulta f '(-2) = 2a(-2) + b = 2, de donde b = 2 + 4a. Igualando b = b, tenemos 2a = 2 + 4a, por tanto 2a = -2, **luego a = -1** y **b = -2**.

La función es ahora $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + c & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - sen(x)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Falta calcular "c".

Como es continua en x = 0 , $f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$

$f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x^2 - 2x + c) = c.$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - sen(x)} = \frac{e^0 - e^0 - 0}{0 - sen(0)} = \frac{1-1}{0-0} = \frac{0}{0};$$

Le aplicamos la regla de L'Hôpital (L'H): Si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ y existe $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

La regla se puede repetir y también para $\frac{\infty}{\infty}$, y cuando $x \to \infty$.

Con lo cual tenemos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - sen(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - e^{-x}\cdot(-1) - 2}{1 - cos(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - cos(x)} = \frac{1+1-2}{1-cos(0)} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0}$$

Le aplicamos de nuevo la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - cos(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - e^{-x}}{0 + sen(x)} = \left\{ \frac{1-1}{sen(0)} = \frac{0}{0}; \text{L'H} \right\} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x + e^{-x}}{cos(x)} = \frac{1+1}{cos(0)} = \frac{2}{1} = 2.$$

Igualando $f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$, resulta **c = 2**, luego los valores pedidos son **a = -1, b = -2 y c = 2**.

Ejercicio 2 opción A, Septiembre 2018 (modelo 4)

[2'5 puntos] Considera la función f definida por f(x) = ax·ln(x) – bx para x > 0 (ln denota la función logaritmo neperiano). Determina a y b sabiendo que f tiene un extremo relativo en x = 1 y que $\int_1^2 f(x)dx = 8ln(2) - 9$.

Solución

Considera la función f definida por f(x)= ax·ln(x) – bx para x > 0 (ln denota la función logaritmo neperiano).
Determina a y b sabiendo que f tiene un extremo relativo en x = 1 y que $\int_1^2 f(x)dx = 8ln(2) - 9$.

Como tiene un extremo relativo en x = 1, tenemos f '(1) = 0

Tenemos $f(x) = ax\cdot\ln(x) - bx$, $f'(x) = a\ln(x) + (ax)/x - b = a\ln(x) + a - b$.

De $f'(1) = 0 \rightarrow a\cdot\ln(1) + a - b = 0 \rightarrow 0 + a - b = 0 \rightarrow$ **a = b**, por tanto $f(x) = ax\cdot\ln(x) - ax$.

De $\int_1^2 f(x)dx = 8\ln(2) - 9$, tenemos $\int_1^2 (ax\cdot\ln(x) - ax)dx = 8\ln(2) - 9 = \{**\} =$

$$= \left[\left(\frac{ax^2}{2}\cdot\ln(x) - \frac{ax^2}{4}\right) - \frac{ax^2}{2}\right]_1^2 = \left[\frac{ax^2}{2}\cdot\ln(x) - \frac{3ax^2}{4}\right]_1^2 = \left(\frac{a(2)^2}{2}\cdot\ln(2) - \frac{3a(2)^2}{4}\right) - \left(\frac{a(1)^2}{2}\cdot\ln(1) - \frac{3a(1)^2}{4}\right) =$$

$$= (2a\cdot\ln(2) - 3a) - \left(0 - \frac{3a}{4}\right) = 2a\cdot\ln(2) - \frac{9a}{4} = \{\text{Igualando}\} = 8\cdot\ln(2) - 9$$, resulta que **a = 4 = b**.

$$\{**\} = \int ax\cdot\ln(x)dx = \left\{\begin{array}{l} u=\ln(x) \quad \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv=axdx \Rightarrow v = \int axdx = \dfrac{ax^2}{2} \end{array}\right\} = \ln(x)\cdot\frac{ax^2}{2} - \int\frac{ax^2}{2}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{ax^2}{2}\cdot\ln(x) - \frac{a}{2}\int xdx = \frac{ax^2}{2}\cdot\ln(x) - \frac{ax^2}{4} + K$$

Ejercicio 3 opción A, Septiembre 2018 (modelo 4)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) [0'75 puntos] Determina, si existen, los valores de a, b y c para que las matrices A y B conmutan.
(b) [1 punto] Calcula A^2, A^3, A^{2017} y A^{2018}.
(c) [0'75 puntos] Calcula, si existe, la matriz inversa de A B^2 y B^{2016}.

Solución

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a)

A y B conmutan si A·B = B·A.

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix};\ B\cdot A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -b & a \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De A·B = B·A, tenemos $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -b & a \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, de donde **a = b = 0 y c = -1 para que las matrices A y B conmuten**.

(b)

Calcula A^2, A^3, A^{2017} y A^{2018}.

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$A^3 = A^2\cdot A = I_3\cdot A = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{2017} = A^{2016}\cdot A^1 = (A^2)^{1008}\cdot A = (I_3)^{1008}\cdot A = I_3\cdot A = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A^{2018} = (A^2)^{1009} = (I_3)^{1009} = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c)
Calcula, si existe, la matriz inversa de A.

Como det(A) = |A| = $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ $\begin{matrix}\text{Adjuntos}\\ \text{primera}\\ \text{fila}\end{matrix}$ = 1(0 + 1) = 1 ≠ 0, existe la matriz inversa $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$.

La calculamos $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$. |A| = 1; $A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, por tanto la matriz inversa

es $\mathbf{A^{-1} =} \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t) = \frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **= A**, es decir coincide con ella misma.

Lo podríamos haber obtenido directamente de la definición, si $A\cdot B = I_3$, siendo A y B matrices de orden 3, entonces B es la inversa de A.

Del apartado (b) teníamos $A\cdot A = I_3$, luego por definición $\mathbf{A = A^{-1}}$.

Ejercicio 4 opción A, Septiembre 2018 (modelo 4)

Considera las rectas $r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$ y $s \equiv \begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ y - 2z = -1 \end{cases}$

a) [1 punto] Estudia y determina la posición relativa de r y s.
b) [1'5 puntos] Calcula la distancia entre r y s.

Solución

Considera las rectas $r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$ y $s \equiv \begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ y - 2z = -1 \end{cases}$

a)
Determina la posición relativa de r y s.

De la recta "r" tomamos un punto, el A(-1,0,-1) y un vector director, el **u** = (2,1,3).

Ponemos la recta $s \equiv \begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ y - 2z = -1 \end{cases}$ en vectorial, tomando z = μ, y = -1 + 2μ, sustituimos "y" en la primera ecuación; 2x – 3(-1 + 2μ) = -5 → 2x + 3 - 6μ = -5 → 2x = -8 + 6μ → x = – 4 + 3μ. La ecuación de "s" en vectorial es s ≡ (x, y, z) = (– 4 + 3μ, -1 + 2μ, μ). Un punto B de "s" es B(-4, -1, 0) y un vector director de "s" es **v** = (3, 2, 1).

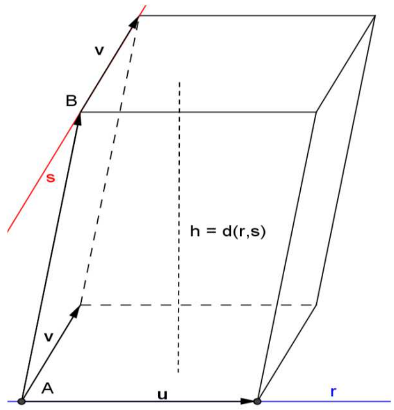
Como los vectores **u** de "r" y **v** de "s" no son proporcionales (2/3 ≠ 1/2), los vectores **u** y **v** no son paralelos, por tanto las rectas "r" y "s" tampoco lo son, luego "r" y "s" se cortan o se cruzan.

Si det(**AB**, **u**, **v**) = 0, "r" y "s" se cortan, con **AB** = **b** – a = (-4, -1, 0) - (-1,0,-1) = (-3, -1, 1)
Si det(**AB**, **u**, **v**) ≠ 0, "r" y "s" se cruzan.

Como det(**AB**, **u**, **v**) = $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 - 2\cdot F_1 \\ F_3 + F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -5 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ $\begin{matrix}\text{Adjuntos}\\ \text{segunda}\\ \text{columna}\end{matrix}$ = -(1)·(-4 - 5) = -9 ≠ 0, luego las rectas **"r" y "s" se cruzan.**

b)
Calculamos la distancia entre "r" y "s"

Antes de resolver el problema, haremos un pequeño dibujo, y de cada recta tomaremos un punto y un vector director.



De la recta “r” tomamos el punto A(-1, 0, -1) y como vector director el **u** = (2, 1, 3).
De la recta “s” tomamos el punto B(-4, -1, 0) y como vector director el **v** = (3, 2, 1).
Tenemos también el vector **AB** = (-3, -1, 1).

Sabemos que el volumen de un paralelepípedo es el valor absoluto (| |) del producto mixto de tres vectores con origen común ([**AB,u,v**]), pero también es el área de la base del paralelepípedo (área de un paralelogramo, que es el módulo del producto vectorial de los vectores que lo determinan **||uxv||**) por la altura del paralelepípedo (h), que es la distancia entre las rectas, es decir:

Volumen del paralelepípedo = **|** [**AB,u,v**] **|** = área base · h = **||uxv||**·d(r, s), de donde la distancia entre las rectas es “d(r, s) = **|** ([**AB,u,v**])/(**||uxv||**) **|**”

AB = (-3, -1, 1); **u** = (2, 1, 3), **v** = (3, 2, 1).

Ya hemos calculado, en el apartado a), [**AB,u,v**] = det(**AB**,**u**,**v**) = $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ = - 9.

uxv = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ = **i**(1-6) – **j**(2-9) + **k**(4-3) = (-5, 7, 1), de donde **||uxv||** = $\sqrt{5^2+7^2+1^2} = \sqrt{75}$.

La distancia pedida es d(r, s) = | ([**AB,u,v**]) / (**||uxv||**) **| =** $\frac{|-9|}{\sqrt{75}} = \frac{9\sqrt{75}}{75} = \frac{3\sqrt{3}}{5}$ u.l. ≅ **1’03923 u.l.**

Opción B

Ejercicio 1 opción B, Septiembre 2018 (modelo 4)

Considera la función f definida por f (x) = a·ln(x) + bx^2 + x para x > 0, donde ln denota la función logaritmo neperiano.
a) [1’5 puntos] Halla a y b sabiendo que f tiene extremos relativos en x = 1 y en x = 2.
b) [1 punto] ¿Qué tipo de extremos tiene f en x = 1 y en x = 2?

Solución

Considera la función f definida por f (x) = a·ln(x) + bx^2 + x para x > 0, donde ln denota la función logaritmo neperiano.
a)
Halla a y b sabiendo que f tiene extremos relativos en x = 1 y en x = 2.

f(x) = a·ln(x) + bx^2 + x, es una función, suma de una función logarítmica con una función polinómica, por tanto es continua y derivable las veces que sean en x > 0.

Como en x = 1 y x = 2 hay extremos relativos, tenemos **f ’(1) = 0 y f ’(2) = 0**.

f(x) = a·ln(x) + bx^2 + x; f ‘(x) = a/x + 2bx + 1,

De f ‘(1) = 0, tenemos a/(1) + 2b(1) + 1 = 0, por tanto **a + 2b + 1 = 0.**
De f ‘(2) = 0, tenemos a/(2) + 2b(2) + 1 = 0, por tanto **a/2 + 4b + 1 = 0** → **a + 8b + 2 = 0.** Restando ambas ecuaciones resulta 6b + 1 = 0, de donde **b = -1/6.** Entrando en la primera tenemos **a + 2(-1/6) + 1 = 0** →

$\rightarrow$ a -1/3 + 1 = 0 $\rightarrow$ **a =** 1/3 - 1 **= -2/3.**
Los valores pedidos son **a =** 1/3 - 1 **= -2/3 y b = -1/6, y nuestra función f(x) = -2ln(x)/(3) - x^2/6 + x**. sus derivadas son f '(x) = -2/(3x) – x/3 + 1 y f ''(x) = (-2/3)·(-1/x^2) – 1/3 = 2/(3x^2) – 1/3.
b)
¿Qué tipo de extremos tiene f en x = 1 y en x = 2?

Sabemos que:
+ Si f '(a) = 0 y f ''(a) > 0 resulta que f(x) presenta un mínimo relativo en a.
+ Si f '(a) = 0 y f ''(a) < 0 resulta que f(x) presenta un máximo relativo en a.

En nuestro caso **f ''(1) =** 2/(3·1^2) – 1/3 = 2/3 – 1/3 **= 1/3 > 0**, **por tanto x = 1 es un mínimo relativo de la gráfica de f, que vale f(1) =** -2ln(1)/(3) – $1(1)^2$/6 + (1) = 0 – 1/6 + 1 **= 5/6 ≅ 0'833.**

Análogamente, **f ''(2) =** 2/(3·2^2) – 1/3 = 1/6 – 1/3 **= -1/6 < 0**, **por tanto x = 2 es un máximo relativo de la gráfica de f, que vale f(2) =** -2ln(2)/(3) – $(2)^2$/6 + (2) **= -2ln(2)/(3) + 4/3 ≅ 0'8712.**

Ejercicio 2 opción B, Septiembre 2018 (modelo 4)

Considera la función f : R → R definida por f(x) = e^{-2x}.
(a) [0'75 puntos] Determina el punto de la gráfica de f en el que la recta tangente es y = -2ex.
(b) [0'5 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, la recta y = -2ex y el eje de ordenadas.
(c) [1'5 puntos] Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

Solución

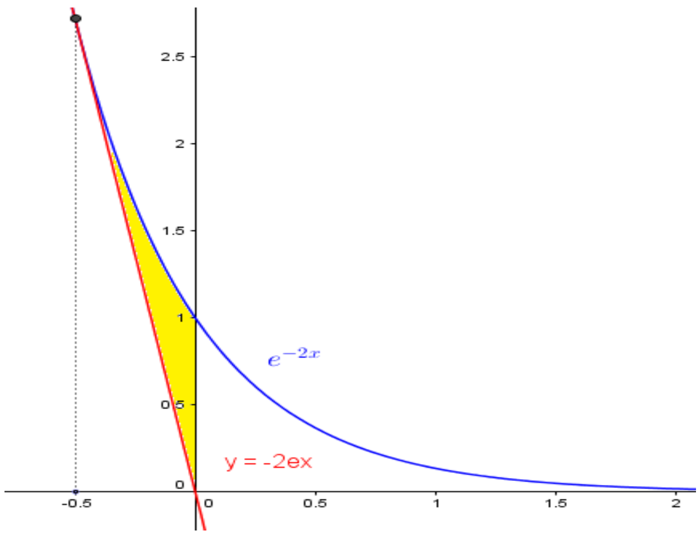
Considera la función f : R → R definida por f(x) = e^{-2x}.
(a)
Determina el punto de la gráfica de f en el que la recta tangente es y = -2ex.

La pendiente de la recta tangente y = -2ex es y ' = -2e.
La pendiente genérica a la gráfica de *f* es f '(x) = e^{-2x}(-2).

Igualamos pendientes: -2e = e^{-2x}(-2) → e^1 = e^{-2x}. Es una ecuación exponencial, como la base es la misma igualamos los exponentes → 1 = -2x, de donde x = -1/2.

El punto pedido de la gráfica de f en el que la recta tangente es y = -2ex **es (-1/2, f(-1/2)) = (-1/2, e^1) = = (-1/2, e).**
(b)
Esboza el recinto limitado por la gráfica de f , la recta y = -2ex y el eje de ordenadas.

La gráfica de f(x) = e^{-2x} **es exactamente igual que la de f(x) = e^{2x}**, estrictamente creciente, pasa por (0,1), (1,e^2) y asíntota horizontal y = 0 en - ∞, **pero simétrica respecto al eje OY**; luego es estrictamente decreciente, pasa por (0,1), (1,e^{-2}) y tiene asíntota horizontal y = 0 en + ∞.
Para la gráfica de la recta y = -2ex, sólo necesitamos dos puntos, uno es el punto de tangencia (-1/2, e) y otro pude ser (0,0).
Un esbozo del recinto limitado por la gráfica de f , la recta y = -2ex y el eje de ordenadas OY es:



El área pedida es

$$\text{Área} = \int_{1/2}^{0}(\text{función - tangente})dx = \int_{1/2}^{0}(e^{-2x} - (-\,2ex))dx = \left[e^{-2x}\left(\frac{-1}{2}\right) + 2e\frac{x^2}{2} \right]_{-1/2}^{0} =$$

$= (e^0(-1/2) + 0) – (e^1(-1/2) + 2(-1/2)^2)\ u^2$ **$= (e/4 – 1/2)\ u^2 \cong$ 0'17957 u^2.**

Ejercicio 3 opción B, Septiembre 2018 (modelo 4)

Considera el sistema siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + y + mz = m^2 \\ \quad y - z = m \\ x + my + z = m \end{cases}$.

a) [1'5 puntos] Discute el sistema según los valores del parámetro m.
b) [1 punto] Resuélvelo para m = 1. Para dicho valor de "m", calcula, si es posible, una solución en la que z=2.

Solución

Considera el sistema siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + y + mz = m^2 \\ \quad y - z = m \\ x + my + z = m \end{cases}$.

a)
Discute el sistema según los valores de m.

Matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$, matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & 1 & -1 & m \\ 1 & m & 1 & m \end{pmatrix}$.

En A, **det(A) =** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}_{F_3 - F_1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & m-1 & 1-m \end{vmatrix}$ Adjuntos primera columna $= 1\cdot(1 – m + m - 1)$ **= 0**, **sea cual sea "m",** luego **rango(A) < 3 siempre**.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$, **rango(A) = 2 siempre, sea cual sea "m".**

En A* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & m^2 \\ 0 & 1 & m \\ 1 & m & m \end{vmatrix}_{F_3 - F_1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m^2 \\ 0 & 1 & m \\ 0 & m-1 & m-m^2 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera columna $= 1\cdot(m – m^2 – m^2 + m) = 2m – 2m^2 = 2m\cdot(1 – m) \neq 0$, luego si **$m \neq 0$ y $m \neq 1$**, tenemos **rango(A*) = 3**.

Por el Teorema de Rouche**, si $m \neq 0$ y $m \neq 1$, rango(A) = 2 $\neq$ rango(A*), luego el sistema es incompatible y no tiene solución.**

Como rango(A) = 2 siempre, si m = 0 y m = 1 tenemos rango(A*) = 2, es decir si m = 0 y m = 1 tenemos rango(A) = rango(A*) = 2 < número de incógnitas, luego el **sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones**, más de una.

b)
Resuélvelo para m = 1. Para dicho valor de "m", calcula, si es posible, una solución en la que z = 2.

Hemos visto en el apartado (a) que si m = 1, *rango(A) = rango(A*) = 2* < número de incógnitas, y *el sistema era compatible e indeterminado y tenía infinitas soluciones*

Como rango = 2, tomamos dos ecuaciones (1ª y 2ª, son las que he utilizado para obtener el menor de orden 2 de A distinto de cero) y dos incógnitas principales:

$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \quad y - z = 1 \end{cases}$, tomando $z = b \in R$ tenemos $y = 1 + b$ y $x = 1 - (1+b) – b = -2b$, la **solución del sistema para m = 1 es: (x,y,z) = (- 2b, 1 + b, b)** con $b \in R$.

Preguntan **si** alguna solución con **z = 2**, en este caso z = 2 = b, con lo cual x = -2(2) = -4 e y = 1 + (2) = 3, y la solución pedida es **(x,y,z) = (-4,3,2).**

Ejercicio 4 opción B, Septiembre 2018 (modelo 4)

Considera las rectas $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{m} = z$ y $s \equiv \begin{cases} x + nz = -2 \\ y - z = -3 \end{cases}$

(a) [1'5 puntos] Halla los valores de "m" y "n" para los que r y s se corten perpendicularmente.
(b) [1 punto] Para m = 3 y n = 1, calcula la ecuación general del plano que contiene a "r" y a "s".

Solución

Considera las rectas $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{m} = z$ y $s \equiv \begin{cases} x + nz = -2 \\ y - z = -3 \end{cases}$

(a)
Halla los valores de "m" y "n" para los que r y s se corten perpendicularmente.

De la recta "r" tomamos un punto, el A(1,-1, 0) y un vector director, el **u** = (2, m, 1).

Ponemos la recta $s \equiv \begin{cases} x + nz = -2 \\ y - z = -3 \end{cases}$ en vectorial, tomando $z = \mu$, $y = -3 + \mu$, $x = -2 - n\mu$. La ecuación de "s" en vectorial es $s \equiv (x, y, z) = (-2 - n\mu, -3 + \mu, \mu)$. Un punto B de "s" es B(-2, -3, 0) y un vector director de "s" es **v** = (-n, 1, 1).

Si las rectas se cortan perpendicularmente, sus vectores directores son perpendiculares y su producto escalar es cero, es decir **u•v** = 0.

u•v = 0 = (2, m, 1)•(-n, 1, 1) = 0 = -2n + m + 1 = 0

También sabemos que si rango**(u, v)** = 2 y rango**(u, v, AB)** = 2, las rectas se cortan en un punto. Además el vector **AB** = **b** – **a** = (-2, -3, 0) - (1,-1, 0) = (-3, -2, 0)

Si rango**(u, v, AB)** = 2 entonces det**(u, v, AB)** = 0 = $\begin{vmatrix} 2 & m & 1 \\ -n & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} \underset{F_2-F_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & m & 1 \\ -n-2 & 1-m & 0 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ Adjuntos tercera colunma =

$= 1\cdot(2n + 4 + 3 - 3m) = 2n - 3m + 7 = 0$.

Resolvemos el sistema $\begin{cases} -2n + m + 1 = 0 \\ 2n - 3m + 7 = 0 \end{cases}$.

Sumando tenemos -2m + 8 = 0, de donde **m = 4**. Entrando en la 2ª ecuación $2n - 3(4) + 7 = 0 \rightarrow 2n - 5 = 0$, de donde **n = 5/2.**

Es decir para **m = 4** y **n = 5/2, las rectas "r" y "s" se cortan perpendicularmente.**

(b)
Para m = 3 y n = 1, calcula la ecuación general del plano que contiene a "r" y a "s".

En nuestro caso tenemos que las rectas son: $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = z$ y $s \equiv \begin{cases} x + z = -2 \\ y - z = -3 \end{cases}$

De la recta "r" tomamos un punto, el A(1,-1, 0) y un vector director, el **u** = (2, 3, 1).

Ponemos la recta $s \equiv \begin{cases} x + z = -2 \\ y - z = -3 \end{cases}$ en vectorial, tomando $z = \mu$, $y = -3 + \mu$, $x = -2 - \mu$. La ecuación de "s" en vectorial es $s \equiv (x, y, z) = (-2 - \mu, -3 + \mu, \mu)$. Un punto B de "s" es B(-2, -3, 0) y un vector director de "s" es **v** = (-1, 1, 1).

Sabemos que dos rectas determinan un plano si son paralelas y distintas o si se cortan en un punto D. Este último es nuestro caso (no extrañarse de los valores de m y n, pues en el apartado (a) tenían que cortarse perpendicularmente), para lo cual necesitaremos para el plano un punto, el D intersección de r y s, y dos vectores independientes, los de dirección de r y s, el **u** = (2, 3, 1) y el **v** = (-1, 1, 1).

Veamos que las rectas se cortan. Como los vectores **u** de "r" y **v** de "s" no son proporcionales (2/-1 ≠ 3/1), los vectores **u** y **v** no son paralelos, por tanto las rectas "r" y "s" tampoco lo son, es decir las rectas "r" y "s" se cortan o se cruzan.

Si det(**AB**, **u**, **v**) = 0, "r" y "s" se cortan, con **AB** = **b** – **a** = (-2, -3, 0) - (1,-1, 0) = (-3, -2, 0)
Si det(**AB**, **u**, **v**) ≠ 0, "r" y "s" se cruzan.

Como det(**AB**, **u**, **v**) = $\begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} F_2 - F_3 = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ = 0, por tener dos filas proporcionales, luego las rectas **"r" y "s" se cortan en un punto.**

Sabemos que para obtener el punto de corte de las rectas "r" y "s", las ponemos en forma paramétrica o vectorial, con parámetros distintos y las igualamos (x = x, y = y, z = z). Se resuelve el sistema formado con dos de ellas y tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas λ y μ. Resolvemos dicho sistema y obtenemos los valores de λ y μ. Entrando con dichos valores en la respectiva recta obtenemos el punto de corte (es el mismo, se entre en la recta que se entre). También se puede ver que estos valores de λ y μ verifican la tercera ecuación que no se ha utilizado.

En nuestro caso: x = x y = y z = z

$1 + 2\lambda = -2 - \mu$ $-1 + 3\lambda = -3 + \mu$ $\lambda = \mu$

Utilizando 1ª y 3ª $\rightarrow$ $1 + 2\lambda = -2 - \lambda$ $\rightarrow$ $3\lambda = -3$ $\rightarrow$ $\boldsymbol{\lambda = -1 = \mu}$.
Que efectivamente verifica la 2ª ecuación -1 + 3(-1) = -3 + (-1).

El punto de corte de r y s es D(1 + 2(-1), -1 + 3(-1), (-1)) = D(-1, -4, -1).

El plano que determinan r y s, en su ecuación general es $\pi \equiv$ det(**DX**, **u**, **v**) = 0 = $\begin{vmatrix} x+1 & y+4 & z+1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila =

= (x+1)(3-1) - (y+4)(2+1) + (z+1)(2+3) = 2x + 2 – 3y – 12 + 5z + 5 **= 2x – 3y + 5z – 5 = 0**