PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2019

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

Considera la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ y los planos $\pi_1 \equiv x = 0$ y $\pi_2 \equiv y = 0$

a) Halla los puntos de la recta r que equidistan de los planos π_1 y π_2.

b) Determina la posición relativa de la recta r y la recta de intersección de los planos π_1 y π_2.

MATEMÁTICAS II. 2019. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas y calculamos un punto genérico.

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \begin{cases} x = 2-t \\ y = 2+3t \\ z = 1+t \end{cases} \Rightarrow P = (2-t, 2+3t, 1+t)$$

Calculamos la distancia de ese punto a los planos, aplicando la fórmula de la distancia de un punto a un plano: $d(P,\pi) = \dfrac{\left| Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

$$\frac{1(2-t)}{\sqrt{1}} = +\frac{1(2+3t)}{\sqrt{1}} \Rightarrow 2-t = 2+3t \Rightarrow t = 0 \Rightarrow P = (2,2,1)$$

$$\frac{1(2-t)}{\sqrt{1}} = -\frac{1(3+2t)}{\sqrt{1}} \Rightarrow 2-t = -2-3t \Rightarrow t = -2 \Rightarrow P = (4,-4,-1)$$

b) Calculamos un punto y vector director de cada recta:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2-t \\ y = 2+3t \\ z = 1+t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = (2,2,1) \\ \vec{u} = (-1,3,1) \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = (0,0,0) \\ \vec{v} = (0,0,1) \end{cases}$$

Calculamos el rango de la matriz formada por los vectores:

$$\vec{u} = (-1,3,1)\ ;\ \vec{v} = (0,0,1)\ y\ \overrightarrow{AB} = (-2,-2,-1)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -6-2 \neq 0 \Rightarrow Rango = 3 \Rightarrow \text{ las rectas se cruzan}$$

Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1,1,0)$; $B(1,0,2)$; $C(0,2,1)$.
a) Halla el área de dicho triángulo.
b) Calcula el coseno del ángulo en el vértice A.
MATEMÁTICAS II. 2019. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los vectores: $\vec{AB}=(0,-1,2)$; $\vec{AC}=(-1,1,1)$

Aplicamos la fórmula que nos da el área del triángulo:

$$S=\frac{1}{2}\,|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\,|=$$

$$=\frac{1}{2}\ \textit{módulo}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\ \textit{módulo}\ (-3,-2,-1)=\frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2+(-2)^2+(-1)^2}=\frac{\sqrt{14}}{2}\,u^2$$

b) $\cos A=\dfrac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{\left|\vec{AB}\right|\cdot\left|\vec{AC}\right|}=\dfrac{-1+2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{15}}=0'2581$

Considera el punto $A(2,1,0)$ y los planos $\pi_1 \equiv x+y+z=0$ y $\pi_2 \equiv x-y+z=0$.

a) Calcula la recta que pasa por A y es paralela a π_1 y a π_2.

b) Calcula los puntos de la recta $s \equiv \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z}{2}$ que equidistan de π_1 y π_2.

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Los vectores normales de los planos son: $n_1=(1,1,1)$ y $n_2=(1,-1,1)$. El vector director de la recta es un vector normal a los vectores normales de los planos, luego:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}+\vec{j}-\vec{k}-\vec{k}-\vec{j}+\vec{i}=(2,0,-2)$$

Luego, la recta pedida es: $r \equiv \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z}{-2}$

b) Pasamos la recta s a paramétricas $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=1+2t \\ y=2+3t \\ z=2t \end{cases}$ y, por tanto, podemos tomar como punto genérico de la recta $P=(1+2t,2+3t,2t)$.

Como piden los puntos que equidistan de los planos π_1 y π_2, tenemos que $d(P,\pi_1)=d(P,\pi_2)$, luego:

$$d(P,\pi_1)=d(P,\pi_2) \Rightarrow \frac{|1+2t+2+3t+2t|}{\sqrt{3}}=\frac{|1+2t-2-3t+2t|}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{|3+7t|}{\sqrt{3}}=\frac{|-1+t|}{\sqrt{3}} \Rightarrow |3+7t|=|-1+t|$$

de donde salen las ecuaciones:

$$3+7t=-1+t \Rightarrow 6t=-4 \Rightarrow t=-\frac{2}{3} \Rightarrow P=\left(1-\frac{4}{3},2-3\cdot\frac{2}{3}-2\cdot\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{1}{3},0,-\frac{4}{3}\right)$$

$$3+7t=-(-1+t) \Rightarrow 8t=-2 \Rightarrow t=-\frac{1}{4} \Rightarrow P=\left(1-\frac{2}{4},2-3\cdot\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{5}{4},-\frac{1}{2}\right)$$

Considera los puntos $A=(0,3,-1)$ y $B=(0,1,a)$ y el plano π de ecuación $x-y+z=0$.
a) Determina a sabiendo que la recta que pasa por A y por B es paralela al plano π.
b) Halla el punto de corte del plano π con la recta que pasa por A y es perpendicular a dicho plano.
c) Para $a=2$, halla el plano que contiene a los puntos A y B y es perpendicular al plano π.
MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el vector director de la recta que pasa por A y B:

$\vec{u}=(0,1,a)-(0,3,-1)=(0,2,-1-a)$

Este vector tiene que ser perpendicular al vector normal del plano: $\vec{n}=(1,-1,1)$. Luego, su producto escalar debe valer cero.

$$\vec{u}\cdot\vec{n}=0\Rightarrow(0,2,-1-a)\cdot(1,-1,1)=0\Rightarrow-2-1-a=0\Rightarrow a=-3$$

b) La recta que pasa por A y es perpendicular al plano, tiene de ecuación:

$$\frac{x}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{1}\Rightarrow\begin{cases}x=t\\y=3-t\\z=-1+t\end{cases}$$

Calculamos el punto de corte con el plano, sustituyendo en la ecuación del plano.

$$t-3+t-1+t=0\Rightarrow 3t=4\Rightarrow t=\frac{4}{3}\Rightarrow P=\left(\frac{4}{3},3-\frac{4}{3},-1+\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right)$$

c) Para $a=2$, el vector $\vec{u}=(0,1,2)-(0,3,-1)=(0,2,-3)$. El plano que nos piden viene definido por el punto A y los vectores $\vec{u}=(0,2,-3)$ y $\vec{n}=(1,-1,1)$ y su ecuación es:

$$\begin{vmatrix}x & 0 & 1\\ y-3 & 2 & -1\\ z+1 & -3 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow -x-3y-2z+7=0\Rightarrow x+3y+2z-7=0$$

Sea r la recta que pasa por el punto $P(2,-2,-1)$ con vector director $\vec{v}=(k,3+k,-2k)$ y sea π el plano de ecuación $-x+2y+2z-1=0$.

a) Calcula el valor de k para que r sea paralela a π.

b) Calcula el valor de k para que r sea perpendicular a π.

c) Para $k=-1$, calcula los puntos de r que distan 3 unidades de π.

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Si r es paralela a π, el vector $\vec{v}=(k,3+k,-2k)$ de la recta y el vector normal del plano $\vec{n}=(-1,2,2)$ son perpendiculares, luego su producto escalar vale 0.

$$\vec{v}\cdot\vec{n}=0\Rightarrow(k,3+k,-2k)\cdot(-1,2,2)=0\Rightarrow -k+6+2k-4k=0\Rightarrow k=2$$

b) Si r es perpendicular a π, el vector $\vec{v}=(k,3+k,-2k)$ de la recta y el vector normal del plano $\vec{n}=(-1,2,2)$ son paralelos, luego sus componentes son proporcionales.

$$\frac{k}{-1}=\frac{3+k}{2}=\frac{-2k}{2}\Rightarrow k=-1$$

c) Para $k=-1$, la recta tiene de ecuación $r\equiv\begin{cases}x=2-t\\ y=-2+2t\\ z=-1+2t\end{cases}$. Un punto genérico de la recta tiene de componentes $A(2-t,-2+2t,-1+2t)$. Calculamos el punto que dista 3 unidades de π.

$$d(A,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|-1\cdot(2-t)+2\cdot(-2+2t)+2\cdot(-1+2t)-1|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}}=3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|9t-9|=9\Rightarrow\begin{cases}9t-9=9\Rightarrow t=2\Rightarrow A=(0,2,3)\\ -9t+9=9\Rightarrow t=0\Rightarrow A=(2,-2,-1)\end{cases}$$

Considera el punto $P(-5,3,1)$ y la recta $r \equiv \frac{x}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{-1}$.

a) Calcula la ecuación general del plano que pasa por *P* y contiene a *r*.

b) Calcula la ecuación de la recta que pasa por *P* y corta perpendicularmente a *r*.

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos un punto y el vector director de la recta $r \equiv \frac{x}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{-1} \Rightarrow \begin{cases} A=(0,3,2) \\ \vec{u}=(2,2,-1) \end{cases}$

El plano que nos piden viene definido por $P=(-5,3,1)$ y los vectores $\vec{u}=(2,2,-1)$ y $\vec{AP}=(5,0,1)$. Luego, la ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x+5 & 2 & 5 \\ y-3 & 2 & 0 \\ z-1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x+10-5y+15-10z+10-2y+6=0 \Rightarrow 2x-7y-10z+41=0$$

b) Un punto genérico de r es: $A=(2t,3+2t,2-t)$. El vector $\vec{AP}=(-5-2t,-2t,-1+t)$ tiene que ser perpendicular al vector director de la recta $\vec{u}=(2,2,-1)$, luego su producto escalar debe valer 0.

$$\vec{AP}\cdot\vec{u}=0 \Rightarrow (-5-2t,-2t,-1+t)\cdot(2,2,-1)=0 \Rightarrow -10-4t-4t+1-t=0 \Rightarrow t=-1$$

La ecuación de la recta que nos piden viene determinada por el punto $P=(-5,3,1)$ y el vector $\vec{AP}=(-3,2,-2)$, luego: $\frac{x+5}{-3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{-2}$

Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+2=0 \\ -y+z+5=0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x+y-mz=1$.

a) Calcula m sabiendo que r y π son paralelos.

b) Para $m=-1$, calcula la distancia entre r y π.

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta r a paramétricas $r \equiv \begin{cases} x+y+2=0 \\ -y+z+5=0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-2-y \\ y=y \\ z=-5+y \end{cases}$

Si la recta r y el plano π son paralelos, el vector director de la recta $\vec{u}=(-1,1,1)$ y el vector normal del plano $\vec{n}=(2,1,-m)$ son perpendiculares, luego su producto escalar vale 0.

$$\vec{u}\cdot\vec{n}=0 \Rightarrow (-1,1,1)\cdot(2,1,-m)=0 \Rightarrow -2+1-m=0 \Rightarrow m=-1$$

b) Como la recta y el plano son paralelos, basta con calcular la distancia del punto de la recta $A=(-2,0,-5)$ al plano

$$d(A,\pi)=\frac{|2\cdot(-2)+1\cdot 0+1\cdot(-5)-1|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{10}{\sqrt{6}}=4'08\,u$$

Halla cada uno de los puntos de la recta $r \equiv \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \end{cases}$ de manera que junto con los puntos $A(1,1,0), B(1,0,1)$ y $C(0,1,1)$ formen un tetraedro de volumen $\frac{5}{6}$

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta a paramétricas

$$r \equiv \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$$

Luego, cualquier punto D de la recta tiene de coordenadas $D(t,t,t)$.

Calculamos los vectores $\vec{AB}=(0,-1,1)$; $\vec{AC}=(-1,0,1)$ y $\vec{AD}=(t-1,t-1,t)$. El volumen del tetraedro será:

$$V=\frac{5}{6}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ t-1 & t-1 & t \end{vmatrix} \Rightarrow 5=\left|-3t+2\right| \Rightarrow \begin{cases} -3t+2=5 \Rightarrow t=-1 \\ 3t-2=5 \Rightarrow t=\frac{7}{3} \end{cases}$$

Luego, los puntos son: $D_1=(-1,-1,-1)$ y $D_2=\left(\frac{7}{3},\frac{7}{3},\frac{7}{3}\right)$

Considera la recta $r \equiv \frac{x-4}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{5}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0$.

a) Halla la ecuación general del plano perpendicular a π que contiene a r.

b) Calcula la distancia entre r y π.

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) El plano que nos piden viene definido por el punto $A = (4,0,1)$ y los vectores $\vec{u} = (2,1,5)$ y $\vec{n} = (2,1,-1)$, luego su ecuación será:.

$$\begin{vmatrix} x-4 & 2 & 2 \\ y & 1 & 1 \\ z-1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = x - 2y - 4 = 0$$

b) Como la recta y el plano son paralelos, basta con calcular la distancia del punto A al plano

$$d(A,\pi) = \frac{|2 \cdot 4 + 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{6}} = 4'08\, u$$

Se consideran los puntos $A(0,-1,3)$, $B(2,3,-1)$ y la recta $r\equiv\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3}$.
a) Halla un punto C de r de forma que el triángulo ABC sea rectángulo en A.
b) Calcula los puntos de r que equidistan de los puntos A y B.
MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas: $r\equiv\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3}\Rightarrow\begin{cases}x=-2+t\\y=2+2t\\z=3+3t\end{cases}$

Un punto genérico de la recta tiene de componentes $C=(-2+t,2+2t,3+3t)$. Si el triángulo es rectángulo en A, los vectores $\overrightarrow{AB}=(2,4,-4)$; $\overrightarrow{AC}=(-2+t,3+2t,3t)$ tienen que ser perpendiculares, luego su producto escalar es 0.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\Rightarrow(2,4,-4)\cdot(-2+t,3+2t,3t)=0\Rightarrow-4+2t+12+8t-12t=0\Rightarrow t=4$$

Por lo tanto, el punto que nos piden es: $C=(-2+4,2+8,3+12)=(2,10,15)$

b) Calculamos los vectores: $\overrightarrow{AC}=(-2+t,3+2t,3t)$ y $\overrightarrow{BC}=(-4+t,-1+2t,4+3t)$

Como el punto C equidista de A y de B, se cumple que: $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$.

$$\sqrt{(-2+t)^2+(3+2t)^2+(3t)^2}=\sqrt{(-4+t)^2+(-1+2t)^2+(4+3t)^2}$$

$$\sqrt{14t^2+8t+13}=\sqrt{14t^2+12t+33}\Rightarrow-4t=20\Rightarrow t=-5$$

Luego, el punto que nos piden es: $C=(-7,-8,-12)$.

Se consideran los vectores $\vec{u}=(1,2,3)$, $\vec{v}=(1,-2,-1)$ y $\vec{w}=(2,\alpha,\beta)$, donde α y β son números reales.

a) Determina los valores de α y β para los que $\vec{w}$ es ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) Determina los valores de α y β para los que $\vec{w}$ y $\vec{v}$ .tienen la misma dirección.

c) Para $\alpha=8$, determina el valor de β para el que $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

MATEMÁTICAS II. 2019. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Como son ortogonales, su producto escalar vale cero, luego:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{w}\cdot\vec{u}=0\Rightarrow 2+2\alpha+3\beta=0\\ \vec{w}\cdot\vec{v}=0\Rightarrow 2-2\alpha-\beta=0\end{array}\right\}\Rightarrow \alpha=2\ ;\ \beta=-2$$

b) Si los dos vectores tienen la misma dirección, sus componentes son proporcionales, luego:

$$\frac{2}{1}=\frac{\alpha}{-2}=\frac{\beta}{-1}\Rightarrow \alpha=-4\ ;\ \beta=-2$$

c) Si el vector $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, esto quiere decir que los tres vectores son linealmente dependientes, es decir, su determinante vale 0.

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & 8 & \beta\end{vmatrix}=0\Rightarrow -2\beta-4+24+12-2\beta+8=0\Rightarrow \beta=10$$