Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función $y = f(x)$ se obtienen a partir de la primera derivada de la función por la siguiente regla:

(a) f crece en un intervalo (a, b) si $f'(x) > 0$ para todo x en (a, b).

(b) f decrece en un intervalo (a, b) si $f'(x) < 0$ para todo x en (a, b).

Los puntos extremos de intervalos en donde cambia el signo de la derivada son los máximos o mínimos, según la derivada cambie de positiva a negativa o de negativa a positiva, respectivamente. En resumen:

(a) Un punto x_0 del dominio de la función corresponde a un *máximo local o relativo* si existe un intervalo $(x_0 - \delta, x_0)$ en donde f crece y otro intervalo $(x_0, x_0 + \delta)$ en donde f decrece.

(b) Un punto x_0 del dominio de la función corresponde a un *mínimo local o relativo* si existe un intervalo $(x_0 - \delta, x_0)$ en donde f decrece y otro intervalo $(x_0, x_0 + \delta)$ en donde f crece.

Los máximos y mínimos locales se encuentran entre los llamados *puntos singulares o críticos*, es decir, puntos del dominio de la función en donde la derivada se anula o no existe.

Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x) = x(\sqrt{x} + 1).$$

Solución

Calculamos la derivada de la función:

$$f'(x) = \sqrt{x} + 1 + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{2x + 2\sqrt{x} + x}{2\sqrt{x}} = \frac{3x + 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

La derivada se anula cuando $3x + 2\sqrt{x} = 0$ y no existe cuando $2\sqrt{x} = 0$. Despejamos x en ambas ecuaciones:

$$3x + 2\sqrt{x} = 0 \Longrightarrow 3x = -2\sqrt{x} \Longrightarrow 9x^2 = 4x \Longrightarrow x = 0 \text{ ó } x = \frac{4}{9}.$$

Como el valor $x = 4/9$ no verifica la primera ecuación, el único valor que anula $f'(x)$ es $x = 0$. Por otra parte,

$$2\sqrt{x} = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

El único punto crítico es $x = 0$. Como el dominio de la función es el intervalo $[0, \infty)$ y $f'(x) \geq 0$ en todo el dominio, la función es siempre creciente. Por tanto, el punto $(0, 0)$ es el mínimo de la función.

Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2}.$$

Solución

De nuevo calculamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot x^2 - (x^3 + 4) \cdot 2x}{x^4} = \frac{x^4 - 8x}{x^4} = \frac{x^3 - 8}{x^3}.$$

La derivada se anula cuando $x^3 - 8 = 0$ y no existe cuando $x^3 = 0$. Despejaremos x en ambas ecuaciones:

$$x^3 - 8 = 0 \Longleftrightarrow x^3 = 8 \Longleftrightarrow x = 2.$$

$$x^3 = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

Como el dominio de la función es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, el único punto crítico es $x = 2$. Estudiamos el crecimiento en los intervalos $(-\infty, 0), (0, 2)$ y $(2, \infty)$. Para ello, sustituimos la derivada de la función en cualquier punto interior a los intervalos. El signo de la derivada indicará si la función original crece o decrece. Así:

$f'(-1) = -9/-1 > 0 \Longrightarrow$ la función crece en $(-\infty, 0)$.

$f'(1) = -7/1 < 0 \Longrightarrow$ la función decrece en $(0, 2)$.

$f'(3) = 19/27 > 0 \Longrightarrow$ la función crece en $(2, \infty)$.

Un método más cómodo por su claridad visual consiste en representar el dominio de la función sobre la recta real. A continuación, colocar en la misma recta los puntos críticos. De esta manera quedan ya delimitados los intervalos que se van a estudiar. Después de sustituir en la derivada de la función algún punto intermedio de cada intervalo, colocar el signo $+$ ó $-$ según si dicha derivada es positiva o negativa. Así quedan completamente determinados los intervalos y el comportamiento de la función en cada uno de ellos. En este ejemplo hubiera quedado así:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$++$	$--$	$++$

Encontrar los máximos y mínimos locales de la función

$$f(x) = x^5 - 5x + 6.$$

Solución

Busquemos los puntos críticos de la función:

$$f'(x) = 5x^4 - 5;\ f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 5x^4 = 5 \Longleftrightarrow x^4 = 1 \Longleftrightarrow x = \pm 1.$$

Como los puntos críticos son $x = 1$ y $x = -1$, estudiamos el signo de la derivada en los intervalos siguientes:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$++$	$--$	$++$

Como a la izquierda de $x = -1$ la función es creciente y a la derecha es decreciente, el punto corresponde a un máximo. Sustituyendo en la función se obtiene que el punto es $(-1, 10)$.

Análogamente, a la izquierda de $x = 1$ la función decrece y a la derecha crece. El punto corresponde a un mínimo y sus coordenadas son $(1, 2)$.

Solución

Los puntos críticos se obtienen de la siguiente forma:

$$f'(x) = \sqrt{1 - x^2} + x \cdot \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1 - x^2 - x^2}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 1 = 2x^2 \Longleftrightarrow x^2 = 1/2 \Longleftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Además $f'(x)$ no existe cuando $\sqrt{1 - x^2} = 0$, es decir, cuando $x = 1$ ó $x = -1$.

Como el dominio de la función es el intervalo $[-1, 1]$, estudiamos el signo de la derivada en los intervalos que se ilustran en la tabla:

	$(-1, -1/\sqrt{2})$	$(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$	$(1/\sqrt{2}, 1)$
$f'(x)$	$--$	$++$	$--$

Lo anterior quiere decir que el punto $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ da lugar a un mínimo local y $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ a un máximo local. Los puntos correspondientes de la función son $(-1/\sqrt{2}, -1/2)$ y $(1/\sqrt{2}, 1/2)$.

¿La función $f(x) = (x-1)^3(x+2)^2$ alcanza un máximo o un mínimo en el punto $A(1, 0)$?

Solución

Como

$$f'(x) = 3(x-1)^2(x+2)^2 + 2(x-1)^3(x+2) = (x-1)^2(x+2)(5x+4),$$

se obtiene que $f'(1) = 0$, con lo que el punto $(1, 0)$ es singular. Para ver si corresponde a un máximo o un mínimo, estudiamos el crecimiento de la función en un entorno de $x = 1$:

Si $x \in (1-\delta, 1)$, $f'(x) > 0$ y f es creciente;

Si $x \in (1, 1+\delta)$, $f'(x) > 0$ y f es también creciente.

Como no cambia el signo de la derivada, la función en el punto $(1, 0)$ no alcanza ni un máximo ni un mínimo relativo.

> Dada la función $y = (x+1)^2 e^{-x}$, hallar los máximos y mínimos locales.

Solución

Calculamos la primera derivada para determinar los puntos críticos:

$$f'(x) = 2(x+1)\cdot e^{-x} - e^{-x}(x+1)^2 = e^{-x}(x+1)(1-x);$$

$$f'(x) = 0 \iff e^{-x}(x+1)(1-x) = 0 \iff x = 1 \text{ ó } x = -1.$$

Los únicos posibles máximos y mínimos se alcanzan en los puntos $P_1(1, 4/e)$ y $P_2(-1, 0)$. Estudiamos a continuación el crecimiento de la función:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$--$	$++$	$--$

De lo anterior se deduce que el punto $P_1(1, 4/e)$ es un máximo local y que el punto $P_2(-1, 0)$ es un mínimo local de la función.

> Hallar, en caso de que existan, las abscisas de los máximos y mínimos de la función
> $$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 14x + 10\ln(x+3) + 90\ln(x-5).$$

Solución

La primera derivada es

$$\begin{aligned} y' &= x^2 + 5x + 14 + \frac{10}{x+3} + \frac{90}{x-5} \\ &= \frac{(x^2+5x+14)(x+3)(x-5) + 10(x-5) + 90(x+3)}{(x+3)(x-5)}. \end{aligned}$$

Al anular la derivada, obtenemos:

$$\begin{aligned} y' = 0 \quad &\iff \quad (x^2+5x+14)(x+3)(x-5)+10(x-5)+90(x+3)=0 \\ &\iff \quad x^4+3x^3-11x^2-3x+10=0. \end{aligned}$$

Si aplicamos la regla de Ruffini, resultan las raíces $1, -1, 2$ y -5.

Teniendo en cuenta que el dominio de la función es el conjunto $D(f) = \{x \mid x > 5\}$, ninguno de los puntos anteriores pertenece al dominio por lo que la función carece de máximos y mínimos. Además, como $f'(x) > 0,\ \forall x \in D(f)$, f es siempre creciente.

Hallar un polinomio de tercer grado sabiendo que para $x = 3$ alcanza un mínimo local, para $x = 2$ alcanza un máximo local y para $x = 0$ y $x = 1$ toma los valores 1 y $29/6$, respectivamente.

Solución

Escribimos la forma general de un polinomio de grado 3 como $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Para $x = 0$, $f(0) = 1 = d$.

Para $x = 1$, $29/6 = a + b + c + d$.

Como $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, tenemos:

Para $x = 3$, $f'(3) = 0 = 27a + 6b + c$.

Para $x = 2$, $f'(2) = 0 = 12a + 4b + c$.

Resulta así el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= 29/6, \\ 27a+6b+c &= 0, \\ 12a+4b+c &= 0, \\ d &= 1. \end{aligned}$$

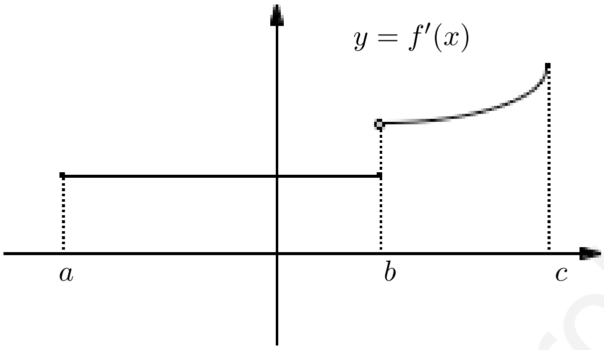
Al resolver el sistema llegamos a la solución $a = 1/3,\ b = -5/2,\ c = 6,\ d = 1$, y la función solución es $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 + 6x + 1$.

Sea $y = f(x)$ una función cuya derivada tiene una gráfica como la que se muestra en la figura.

a) ¿Qué se puede decir de f en $x = b$?

b) ¿Tiene f algún máximo?

c) ¿Dónde f decrece?



Solución

a) De la gráfica se deduce que $f'(x)$ no es continua en $x = b$, porque los límites laterales son diferentes. Esto indica que la función f no es derivable en $x = b$.

b) En todo el intervalo (a, b) la derivada de f es positiva. Por lo tanto, la función crece.

   De la misma manera, en el intervalo (b, c) la función f también crece. El máximo se encuentra en c, que es el extremo derecho del intervalo donde está definida la función.

c) De lo anterior se deduce que en ningún momento la función decrece, porque la derivada nunca es negativa.