Matrices elementales.
Forma normal de Hermite

1. GENERALIDADES SOBRE MATRICES.

Una matriz de dimensión $m \times n$ puede ser considerada como una lista formada por un conjunto de listas de la misma longitud siendo m el número de listas que la componen y n la longitud de las mismas. Por ejemplo, la lista:

In[]:= **a={{1,2,3},{2,3,4},{3,4,6}};**

puede considerarse que representa a la tabla o matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Si se desea que Mahtematica la represente en forma tabular, escribiremos:

MatrixForm[a]

La orden **Dimensions[nombre]** genera una lista formada por un único número igual a su longitud, si "nombre" es una matriz fila o columna, o por dos números en caso contrario que representan el número de filas y el de columnas, respectivamente.

In[]:= **v={-1,2,3};**

In[]:= **Dimensions[v]**

Out[]= `{3}`

In[]:= **Dimensions[a]**

Out[]= `{3,3}`

Si se desea seleccionar una fila de una matriz, bastará con escribir el nombre de la misma y, entre dobles corchetes, la posición que ocupa dicho elemento. La *i*-ésima componente de v se selecciona mediante **v[[i]]**, y el elemento que ocupa la posición (i, j) de la matriz a mediante **a[[i,j]]**.

Las órdenes

In[]:= **m=Dimensions[a][[1]]**

In[]:= **n=Dimensions[a][[2]]**

asignan a m y n el número de filas, 3 y el de columnas, 3 de la lista a, pues Dimensions[a] es la lista formada por estos dos valores.

Las siguientes funciones permiten construir algunos tipos especiales de matrices:

a) **DiagonalMatrix[{x,y,z,...}]**

Genera la matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son sus argumentos.

In[]:= **DiagonalMatrix[{1,-2,4}]**

Out[]= `{{1, 0, 0}, {0, -2, 0}, {0, 0, 4}}`

b) **IdentityMatrix[n]**

Matriz identidad de orden n.

In[]:= **IdentityMatrix[4]**

Out[]=
```
{{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0},
 {0, 0, 0, 1}}
```

2. OPERACIONES CON MATRICES.

La suma y el producto de matrices con las correspondientes condiciones sobre sus dimensiones, se expresan mediante los operadores "+" y "." respectivamente. Consideremos las siguientes matrices:

In[]:= **a=Table[1/(i+j),{i,5},{j,5}];**
b={{2,3,4,5,6},{3,4,5,6,7},{4,5,6,7,8},{5,6,7,8,9},{6,7,8,9,10}};
MatrixForm[a]
MatrixForm[b]

Out[]=

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Algunos ejemplos de operaciones son:

a) *In[]:=* **a+b//MatrixForm**

Out[]=

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{10}{3} & \frac{17}{4} & \frac{26}{5} & \frac{37}{6} \\ \frac{10}{3} & \frac{17}{4} & \frac{26}{5} & \frac{37}{6} & \frac{50}{7} \\ \frac{17}{4} & \frac{26}{5} & \frac{37}{6} & \frac{50}{7} & \frac{65}{8} \\ \frac{26}{5} & \frac{37}{6} & \frac{50}{7} & \frac{65}{8} & \frac{82}{9} \\ \frac{37}{6} & \frac{50}{7} & \frac{65}{8} & \frac{82}{9} & \frac{101}{10} \end{pmatrix}$$

b) *In[]:=* **a b**

Out[]=

```
{{1,1,1,1,1},{1,1,1,1,1},{1,1,1,1,1},{1,1,1,1,1},
{1,1,1,1,1}}
```

c) *In[]:=* **a*b**

Out[]=

```
{{1,1,1,1,1},{1,1,1,1,1},{1,1,1,1,1},{1,1,1,1,1},
{1,1,1,1,1}}
```

d) *In[]:=* **a.b//MatrixForm**

Out[]=

$$\begin{pmatrix} 5 & \frac{129}{20} & \frac{79}{10} & \frac{187}{20} & \frac{54}{5} \\ \frac{547}{140} & 5 & \frac{853}{140} & \frac{503}{70} & \frac{1159}{140} \\ \frac{1357}{420} & \frac{3457}{840} & 5 & \frac{4943}{840} & \frac{2843}{420} \\ \frac{2321}{840} & \frac{4421}{1260} & \frac{10721}{2520} & 5 & \frac{14479}{2520} \\ \frac{1523}{630} & \frac{2573}{840} & \frac{4673}{1260} & \frac{10973}{2520} & 5 \end{pmatrix}$$

Las potencias de una matriz las calcularemos a través de la función **MatrixPower[matriz, n]**, quien realiza la potencia n-ésima de la matriz "matriz".

In[]:= **M={{2,3,4},{3,4,5},{4,5,6}}**
MatrixPower[M,4]

Out[]=

```
{{4493, 5916, 7338}, {5916, 7788, 9660},
 {7338, 9660, 11982}}
```

sin embargo de la forma siguiente no calculamos las potencias

In[]:= **M^4**

Out[]= `{{16, 81, 256}, {81, 256, 625}, {256, 625, 1296}}`

El producto de un escalar por un vector o una matriz se expresa mediante el operador "*" o un espacio:

a) *In[]:=* **0 a**

Out[]= `{{0,0,0,0,0},{0,0,0,0,0},{0,0,0,0,0},{0,0,0,0,0},{0,0,0,0,0}}`

b) *In[]:=* **0*a**

Out[]= `{{0,0,0,0,0},{0,0,0,0,0},{0,0,0,0,0},{0,0,0,0,0},{0,0,0,0,0}}`

La transpuesta de una matriz la calculamos a partir de la función **Transpose[matriz]** quien nos devuelve la transpuesta de "matriz".

In[]:=

```
M2={{1,0},{3,2},{4,-1}};
Transpose[M2]
```

Out[]= `{{1, 3, 4}, {0, 2, -1}}`

3. MATRICES ELEMENTALES EN MATHEMATICA.

Vamos a definir las matrices elementales en Mathematica. Recordemos que una matriz elemental es la matriz que se obtiene al realizar una y solo una transformación elemental por filas sobre la matriz identidad. Como sabemos hay tres tipos, cada uno de ellos correspondientes a una de las transformaciones elementales.

Tipo I: Se obtiene intercambiando en la matriz identidad de orden n, las filas i y j, en Mathematica tal transformación la denotaremos por el1[i, j, n]:

In[]: =

```
el1[i_,j_,n_] :=Module[{B},
B =IdentityMatrix[n];
B[[i, i]] = 0;
B[[j, j]] = 0;
B[[i, j]] = 1;
B[[j, i]] = B[[i, j]];
B]
```

In[]: = **el1[3, 4, 5]//MatrixForm**

Out[] =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tipo II: Se obtiene multiplicando la fila i de la matriz identidad de orden n por k y en Mathematica la vamos a denotar mediante el2[i, k, n]:

In[]: =

```
el2[i_, k_, n_] :=Module[{B},
B =IdentityMatrix[n];
B[[i, i]] = k;
B]
```

In[]: =

```
el2[2, -4, 3]//MatrixForm
```

Out[] =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tipo III: Se obtiene sumando a la fila i de la matriz identidad de orden n, la fila j previamente multiplicada por k, en Mathematica la vamos a denotar por el3[i, j, k, n]:

In[]: =

```
el3[i_, j_, k_, n_] :=Module[{B},
B =IdentityMatrix[n];
B[[i, j]] = k;
B]
```

In[]: =

```
el3[3, 1, 5, 4]//MatrixForm
```

Out[] =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En lo sucesivo siempre que queramos trabajar con matrices elementales en el Mathematica hemos de ejecutar previamente la definición de las matrices elementales, pues Mathematica no las tiene predeterminadas.

Por último, vamos a comprobar como dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y dada E (resp. F) matriz elemental de orden m (resp. n), entonces EA (resp. AF) es la matriz que se obtiene de A aplicando a sus filas (resp. columnas) la misma transformación elemental con la que se obtiene E (resp. F) a partir de la identidad:

In[]: =

```
A={{1,2,3,4},{2,3,4,5},{3,4,5,6}};
b=el1[2,3,3].A;
MatrixForm[b]
c=A.Transpose[el2[2,3,4]];
MatrixForm[c]
```

Out[]=

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 4 & 5 \\ 3 & 12 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

2. FORMA NORMAL DE HERMITE POR FILAS.

En este apartado nos proponemos calcular la forma de Hermite por filas de una matriz, por ejemplo:

In[]: = **a={{3,6,-5,0},{1,1,2,9},{2,4,-3,1}};**
MatrixForm[a]

Out[] = $\begin{pmatrix} 3 & 6 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Para hacerlo de una forma directa, Mathematica incorpora el siguiente comando:

RowReduce[matriz]

que nos devuelve la forma normal de Hermite por filas de matriz:

In[]: = **RowReduce[a]\\MatrixForm**

Out[] = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Sin embargo, si queremos calcularla paso a paso, utilizando transformaciones elementales, en primer lugar tendremos que ejecutar el fichero donde tengamos la definición de las matrices elementales.

Una vez que hemos introducido la matriz en el Mathematica:

In[]: = **a={{3,6,-5,0},{1,1,2,9},{2,4,-3,1}};**
MatrixForm[a]

Out[] = $\begin{pmatrix} 3 & 6 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Iremos realizando transformaciones elementales hasta conseguir la forma normal de Hemite, para lo cual multiplicaremos A, a izquierda, por las correspondientes matrices elementales. En primer lugar, intercambiamos la fila 1 y la fila 2, para obtener el pivote 1:

In[]: = **a1=el1[1, 2, 3].a;**
MatrixForm[a1]

Out[] = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

A continuación haremos ceros por debajo del pivote:

In[]: = **a2=el3[2, 1, -3, 3].a1;**
MatrixForm[a2]

Out[] = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

In[]: = **a3=el3[3, 1, -2, 3].a2;**
MatrixForm[a3]

Out[] = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \end{pmatrix}$

Repetiremos el proceso con las $m - 1$ filas restantes y las $n - 1$ columnas restantes. Primero el segundo pivote 1:

In[]: = **a4=el2[2, 1/3, 3].a3;**
MatrixForm[a4]

Out[] = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{3} & -9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \end{pmatrix}$

Ceros por debajo de él:

In[]: = **a5=el3[3, 2, -2, 3].a4;**
MatrixForm[a5]

Out[] = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{3} & -9 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$

Haremos el tercer pivote 1, consiguiendo una matriz escalonada:

In[]: = **a6=el2[3, 3, 3].a5;**
MatrixForm[a6]

Out[] = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{3} & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Nuestro objetivo, ahora, será hacerla reducida. Para ello haremos ceros por encima de cada pivote. En primer lugar podemos utilizar el tercer pivote:

In[]: = **a7=el3[2, 3, 11/3, 3].a6;**
MatrixForm[a7]

Out[] = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

In[]: = **a8=el3[1, 3, -2, 3].a7;**
MatrixForm[a8]

Out[] = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Ahora usamos el segundo pivote y obtendremos ya la forma normal de Hermite por filas de a:

In[]: = **a9=el3[1, 2, -1, 3].a8;**
Print["La forma normal de Hermite de a es: ",
MatrixForm[a9]]

Out[] = `La forma normal de Hermite de a es:` $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Observemos que H= E_k ... E_1 A es decir, la forma normal de Hermite es el producto de las matrices elementales por A (¡cuidado con el orden!):

In[]: = **H=el3[1, 2, -1, 3]. el3[1, 3, -2, 3]. el3[2, 3, 11/3, 3]. el2[3, 3, 3]. el3[3, 2, -2, 3]. el2[2, 1/3, 3]. el3[3, 1, -2, 3]. el1[1, 2, 3].a;**
MatrixForm[H]

Out[] = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$