Integración por cambio de variable

18. Calcula las siguientes integrales haciendo el cambio que se indica:

a) $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx \;\to\; (1-x^2=t)$ b) $\int (\sin x)^3\,dx \to (\cos x = t)$

c) $\int \dfrac{dx}{x(4-\ln x)} \to (t=\ln x)$ d) $\int x\cdot\sqrt[3]{4+x^2}\,dx \to (4+x^2=t)$

Solución:

a) Si $1-x^2=t \;\Rightarrow\; -2xdx=dt \Rightarrow xdx=-\dfrac{1}{2}dt$.

Por tanto:

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-x^2}\,(xdx) = -\frac{1}{2}\int t^{1/2}dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{3/2}}{3/2}+c = -\frac{1}{3}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}+c$$

Observación: $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$ puede hacerse directamente (es inmediata), pues:

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int\left(-2x(1-x^2)^{1/2}\right)dx = -\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3/2}+c = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}+c$$

b) Si $\cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt$.

Como

$$\int \sin^3 x dx = \int \sin x\cdot\sin^2 x dx = \int \sin x\cdot(1-\cos^2 x)dx = -\int\left(1-\cos^2 x\right)\left(-\sin x dx\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \sin^3 x dx = -\int\left(1-t^2\right)dt = -t+\frac{t^3}{3}+c = -\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+c$$

c) Si $t=\ln x \;\Rightarrow\; dt=\dfrac{1}{x}dx$.

Luego:

$$\int \frac{dx}{x(4-\ln x)} = \int \frac{1}{(4-\ln x)}\cdot\left(\frac{1}{x}dx\right) = \int \frac{1}{4-t}dt = -\ln(4-t)+c = -\ln(4-\ln x)+c$$

d) Si $4+x^2=t \;\Rightarrow\; 2xdx=dt \Rightarrow xdx=\dfrac{1}{2}dt$

Por tanto:

$$\int x\cdot\sqrt[3]{4+x^2}\,dx = \int\left(4+x^2\right)^{1/3}\cdot(xdx) = \int t^{1/3}\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{4/3}}{4/3}+c = \frac{3}{8}\left(4+x^2\right)^{4/3}+c$$

Observación: También se puede hacer ajustando constantes, pues:

$$\int x\cdot\sqrt[3]{4+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\left(4+x^2\right)^{1/3}dx = \left(\int f'(x)\cdot\left(f(x)\right)^n\right) = \frac{1}{2}\frac{\left(4+x^2\right)^{1/3+1}}{1/3+1}+c =$$

$$= \frac{3}{8}\cdot\sqrt[3]{\left(4+x^2\right)^4}+c$$

19. Halla la integral indefinida $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$ mediante el cambio de variable $\sqrt{x}=t$.

Solución:

Si $\sqrt{x}=t \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}dt = 2tdt$.

Por tanto,

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{1+t}2tdt = \int \frac{2t}{1+t}dt = \int \frac{2(1+t)-2}{1+t}dt = \int \left(2-\frac{2}{1+t}\right)dt = 2t - 2\ln(1+t)+c =$$

$= \text{(deshaciendo el cambio)} = 2\sqrt{x} - 2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+c$

20. Propuestos en UNED. Calcula:

a) $\int \frac{2^x}{2^{2x}+2}dx$ b) $\int x^2 \tan^2 x^3 dx$

Solución:

a) $\int \frac{2^x}{2^{2x}+2}dx \to$ puede hacerse el cambio $2^x = t \Rightarrow 2^x \ln 2 dx = dt \Rightarrow 2^x dx = \frac{1}{\ln 2}dt$.

Por tanto,

$$\int \frac{2^x}{2^{2x}+2}dx = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{1}{t^2+2}dt = \text{(Ver problema 2. a))} =$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}+c = \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{2^x}{\sqrt{2}}+c .$$

b) $\int x^2 \tan^2 x^3 dx \to$ puede hacerse el cambio $x^3 = t \Rightarrow 3x^2 dx = dt$.

Por tanto,

$$\int x^2 \tan^2 x^3 dx = \frac{1}{3}\int \tan^2 t dt = \frac{1}{3}\int \left(1+\tan^2 t - 1\right)dt = \frac{1}{3}\left(\tan t - t\right)+c = \frac{1}{3}\left(\tan x^3 - x^3\right)+c$$

21. Calcula $\int x^7 e^{x^4}dx$ $\to$ Sugerencia: cambio $t = x^4$)

Solución:

Si $t = x^4 \Rightarrow dt = 4x^3 dx$.

Sustituyendo:

$$\int x^7 e^{x^4}dx = \int x^4 e^{x^4}\cdot\left(x^3 dx\right) = \int te^t\cdot\frac{1}{4}dt = \frac{1}{4}\int te^t dt$$

Esta integral se hace por partes:

$u = t \Rightarrow du = dt$; $dv = e^t dt \Rightarrow v = e^t$

Luego:

$$\frac{1}{4}\int te^t dt = \frac{1}{4}\left(te^t - \int e^t dt\right) = \frac{1}{4}\left(te^t - e^t + c\right)$$

Deshaciendo el cambio: $\int x^7 e^{x^4}dx = \frac{1}{4}\int te^t dt = \frac{1}{4}\left(x^4 e^{x^4} - e^{x^4}\right)+c$

Observación: se termina antes si se hace directamente por partes, tomando:

$u = x^4 \Rightarrow du = 4x^3 dx$

$dv = x^3 e^{x^4}dx \Rightarrow v = \frac{1}{4}e^{x^4}$

Por tanto:

$$\int x^7 e^{x^4}dx = x^4\frac{1}{4}e^{x^4} - \int x^3 e^{x^4}dx = x^4\frac{1}{4}e^{x^4} - \frac{1}{4}e^{x^4} + c$$

22. Haciendo el cambio de variable $e^x = t$, halla:

a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}dx$ b) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx$

Solución:

a) Si $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$.

Por tanto:

$$\int \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}dx = \int \frac{1}{\left(1+t\right)^2}dt = \int \left(1+t\right)^{-2}dt = -\left(1+t\right)^{-1} + c = \frac{-1}{1+t} + c.$$

Deshaciendo el cambio:

$$\int \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}dx = \frac{-1}{1+e^x} + c$$

b) Si $e^x = t$ se tiene: $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx = \int \frac{1}{t^2+3t+2}dt$

Por descomposición en fracciones simples:

$$\frac{1}{t^2+3t+2} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2} = \frac{A\left(t+2\right)+B\left(t+1\right)}{\left(t+1\right)\left(t+2\right)} \Rightarrow 1 = A\left(t+2\right)+B\left(t+1\right) \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

Por tanto,

$$\int \frac{1}{t^2+3t+2}dx = \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}\right)dt = \ln\left(t+1\right) - \ln\left(t+2\right) = \ln\frac{t+1}{t+2} \Rightarrow$$

Deshaciendo el cambio:

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx = \ln\frac{e^x+1}{e^x+2} + c$$

23. (Propuesto en Selectividad, Aragón, junio 14). Usando el cambio de variable $t = \ln(x)$, determina el valor de la integral: $\displaystyle\int \frac{1+3\ln(x)+\left(\ln(x)\right)^3}{x\left(1-\left(\ln(x)\right)^2\right)}dx$

Solución:

a) Si $t = \ln(x) \Rightarrow dt = \dfrac{1}{x}dx$; luego:

$$\int \frac{1+3\ln(x)+\left(\ln(x)\right)^3}{x\left(1-\left(\ln(x)\right)^2\right)}dx = \int \frac{1+3\ln(x)+\left(\ln(x)\right)^3}{\left(1-\left(\ln(x)\right)^2\right)}\cdot\frac{1}{x}dx = \int \frac{1+3t+t^3}{1-t^2}dt$$

La última integral se hace por descomposición en fracciones simples. Dividiendo:

$$\frac{1+3t+t^3}{1-t^2} = -t + \frac{4t+1}{1-t^2} \to \frac{4t+1}{1-t^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{b}{1+t} = \frac{A(1+t)+B(1-t)}{1-t^2} \Rightarrow A = \frac{5}{2};\ B = -\frac{3}{2}.$$

Por tanto:

$$\int \frac{1+3t+t^3}{1-t^2}dt = \int \left(-t + \frac{5/2}{1-t} - \frac{3/2}{1+t}\right)dt = -\frac{t^2}{2} - \frac{5}{2}\ln\left(1-t\right) - \frac{3}{2}\ln\left(1+t\right) + c$$

Deshaciendo el cambio:

$$\int \frac{1+3\ln(x)+\left(\ln(x)\right)^3}{x\left(1-\left(\ln(x)\right)^2\right)}dx = -\frac{(\ln x)^2}{2} - \frac{5}{2}\ln\left(1-\ln x\right) - \frac{3}{2}\ln\left(1+\ln x\right) + c.$$