

## Método de integración por partes

15. Calcula las siguientes integrales:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \int x \cos x dx & \text{b) } \int x e^{2x} dx & \text{c) } \int x^2 \cdot e^{3x} dx & \text{d) } \int 2x^3 e^{x^2} dx \\ \text{e) } \int (x \ln x) dx & \text{f) } \int \arcsin x dx & \text{g) } \int x^2 \sin(2x) dx & \text{h) } \int x^3 \cos x dx \end{array}$$

Solución:

Todas pueden resolverse aplicando el método de integración por partes.

$$\text{a) } \int x \cos x dx$$

Se toma:  $x = u$  y  $dv = \cos x dx \Rightarrow du = dx$  y  $v = \sin x$

Luego,

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + c$$

$$\text{b) } \int x e^{2x} dx$$

Tomando:  $u = x \Rightarrow du = dx$ ;  $e^{2x} dx = dv \Rightarrow \int e^{2x} dx = \int dv \Rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x}$

Luego:

$$\int x e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + c$$

$$\text{c) } \int x^2 \cdot e^{3x} dx.$$

Tomando:  $u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$ ;  $dv = e^{3x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{3} e^{3x}$

Se tiene:  $\int x^2 e^{3x} dx = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx$

La segunda integral,  $\int x e^{3x} dx$ , también se hace por partes.

Tomando ahora:  $u = x \Rightarrow du = dx$ ;  $dv = e^{3x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{3} e^{3x}$

Se tiene:  $\int x e^{3x} dx = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x}$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{3x} dx &= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \left( \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} \right) + c = \\ &= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{9} x e^{3x} + \frac{2}{27} e^{3x} + c \end{aligned}$$

d)  $\int 2x^3 e^{x^2} dx$ .

Haciendo  $u = x^2$  y  $dv = 2xe^{x^2} dx$  se tiene:

$$\int 2x^3 e^{x^2} dx = x^2 e^{x^2} - \int 2xe^{x^2} dx = x^2 e^{x^2} - e^{x^2} + c$$

e)  $\int (x \ln x) dx$ .

Tomando:  $u = x \ln x \Rightarrow du = (\ln x + 1) dx$ ;  $dv = dx \Rightarrow v = x$

$$\text{Luego, } \int (x \ln x) dx = x^2 \ln x - \int (x \ln x + x) dx = x^2 \ln x - \int (x \ln x) dx + \int x dx$$

En el segundo miembro aparece la misma integral, que se traspone al primer miembro, obteniéndose,

$$2 \int (x \ln x) dx = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} + c$$

$$\text{De donde, } \int (x \ln x) dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} + c$$

f)  $\int \arcsin x dx$

Se toma:  $u = \arcsin x \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ;  $dv = dx \Rightarrow v = x$

$$\text{Luego, } \int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$$

g)  $\int x^2 \sin(2x) dx$

Haciendo:  $x^2 = u$ ,  $\sin 2x dx = dv \Rightarrow 2x dx = du$ ;  $v = -\frac{1}{2} \cos 2x$

$$\text{Luego, } \int x^2 \sin(2x) dx = -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \int x \cos 2x dx$$

Para hacer la segunda integral se aplica nuevamente el método de partes.

$$\int x \cos 2x dx$$

Tomando:  $x = u$ ;  $dv = \cos 2x dx \Rightarrow dx = du$ ;  $v = \frac{1}{2} \sin 2x$

$$\text{Luego, } \int x \cos 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x$$

$$\text{Por tanto: } \int x^2 \sin(2x) dx = -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + c$$

h)  $\int x^3 \cos x dx$ .

Se hace:  $u = x^3$ ;  $dv = \cos x dx \Rightarrow du = 3x^2 dx$ ;  $v = \sin x$

Luego:

$$\int x^3 \cos x dx = x^3 \sin x - \int 3x^2 \sin x dx$$

Segunda integral:  $\int 3x^2 \sin x dx = -3x^2 \cos x + \int 6x \cos x dx$

(Se ha hecho:  $3x^3 = u$ ;  $\sin x dx = dv$ )

Tercera integral:  $\int 6x \cos x dx = 6x \sin x + 6 \cos x$

(Se hace:  $6x = u$ ;  $\cos x dx = dv$ )

Luego:

$$\int x^3 \cos x dx = x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x + c.$$

16. Utilizando el método de integración por partes, calcula  $\int \frac{x}{e^x} dx$

Solución:

$$\int \frac{x}{e^x} dx = \int x e^{-x} dx$$

Se hace:

$$u = x \text{ y } dv = e^{-x} dx \Rightarrow du = dx; v = -e^{-x}$$

Luego:

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + c$$

17. A partir del resultado de  $\int \ln x dx$ , calcula las siguientes integrales.

a)  $2 \int \ln x dx$     b)  $\int \ln(2x) dx$     c)  $\int \ln x^2 dx$     d)  $\int (\ln x)^2 dx$

Solución:

$\int \ln x dx$  se calcula por el método de partes.

Tomando:  $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$ ;  $dv = dx \Rightarrow v = x$

Luego:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c$$

Con esto:

a)  $2 \int \ln x dx = 2 \left( x \ln x - \int dx \right) = 2(x \ln x - x) + c$

b)  $\int \ln(2x) dx = \int (\ln 2 + \ln x) dx = \int \ln 2 dx + \int \ln x dx = (\ln 2) \cdot x + x \ln x - x + c$

c)  $\int \ln x^2 dx = \int 2 \ln x dx = 2 \int \ln x dx = 2 \left( x \ln x - \int dx \right) = 2(x \ln x - x) + c$

$$d) \int (\ln x)^2 dx$$

$$\text{Tomando: } u = (\ln x)^2 \Rightarrow du = 2(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx; \quad dv = dx \Rightarrow v = x$$

Luego:

$$\begin{aligned} \int (\ln x)^2 dx &= x(\ln x)^2 - \int 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} x dx = x(\ln x)^2 - \int 2 \ln x dx = \\ &= x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + c \end{aligned}$$

www.yoquieroaprobar.es