

Integrales inmediatas

1. Calcula las siguientes integrales:

- | | | |
|-----------------------------------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| a) $\int (3x^2 + x - 2\sqrt{x}) dx$ | b) $\int x(4 - 4x^2) dx$ | c) $\int \frac{e^{-2x}}{5} dx$ |
| d) $\int \frac{5x}{3+3x^2} dx$ | e) $\int \cos(4x + 3) dx$ | f) $\int \left(\sin 2x - \frac{1}{3}\cos 5x\right) dx$ |
| g) $\int \left(3\cos \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{5}\right) dx$ | h) $\int x \cos(3x^2) dx$ | i) $\int (\cos(2x) - 3e^{2x-3}) dx$ |
| j) $\int \cos x \cdot (\sin x)^2 dx$ | k) $\int 5x(1 - 2x^2)^2 dx$ | l) $\int (2 - 3x)^2 dx$ |
| m) $\int \frac{x^2}{x^3 + 2} dx$ | n) $\int \frac{3}{1+x^2} dx$ | o) $\int \frac{4x^2}{\sqrt{3-x^3}} dx$ |
| p) $\int \frac{5x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ | q) $\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}} dx$ | r) $\int 2xe^{3x^2} dx$ |
| s) $\int (1-x)^3 dx$ | t) $\int x(1-x)^3 dx$ | u) $\int \frac{(x-1)^3}{x} dx$ |

Solución:

En la mayoría de los casos hay que ajustar constantes y operar cuando sea necesario.

- a) $\int (3x^2 + x - 2\sqrt{x}) dx = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2 \int x^{1/2} dx = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2 \frac{x^{3/2}}{3/2} + c$
- b) $\int x(4 - 4x^2) dx = \int (4x - 4x^3) dx = 2x^2 - x^4 + c$
- c) $\int \frac{e^{-2x}}{5} dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(-2)} \int (-2)e^{-2x} dx = -\frac{1}{10}e^{-2x} + c$
- d) $\int \frac{5x}{3+3x^2} dx = \frac{5}{6} \int \frac{6x}{3+3x^2} dx = \frac{5}{6} \ln(3+3x^2) + c$
- e) $\int \cos(4x + 3) dx = \frac{1}{4} \int 4 \cos(4x + 3) dx = \frac{1}{4} \sin(4x + 3) + c$
- f) $\int \left(\sin 2x - \frac{1}{3}\cos 5x\right) dx = \frac{1}{2} \int 2 \sin 2x dx - \frac{1}{3} \int 5 \cos 5x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{15} \sin 5x + c$
- g) $\int \left(3\cos \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{5}\right) dx = 6 \int \left(\frac{1}{2}\cos \frac{x}{2}\right) dx - \frac{1}{10} \int 2 \sin 2x dx = 6 \sin \frac{x}{2} + \frac{1}{10} \cos 2x + c$
- h) $\int x \cos(3x^2) dx = \frac{1}{6} \int 6x \cos(3x^2) dx = \frac{1}{6} \sin(3x^2) + c$

i) Ajustando constantes en cada una de las funciones:

$$\begin{aligned} \int (\cos(2x) - 3e^{2x-3}) dx &= \int \cos(2x) dx - \int (3e^{2x-3}) dx = \frac{1}{2} \int 2 \cos(2x) dx - \frac{3}{2} \int (2e^{2x-3}) dx = \\ &= \frac{1}{2} \sin(2x) - \frac{3}{2} e^{2x-3} + c \end{aligned}$$

j) Ajustando constantes:

$$\begin{aligned} \int \cos x \cdot (\sin x)^2 dx &= \frac{1}{3} \int 3(\sin x)^2 \cdot \cos x dx = \frac{1}{3} (\sin x)^3 + c \\ k) \int 5x(1-2x^2)^2 dx &= -\frac{5}{4} \int (-4x(1-2x^2)^2) dx = -\frac{5}{4} \cdot \frac{(1-2x^2)^3}{3} + c = -\frac{5}{12} (1-2x^2)^3 + c \end{aligned}$$

l) Se opera en el integrando:

$$\int (2-3x)^2 dx = \int (4-12x+9x^2) dx = 4x - 6x^2 + 3x^3 + c$$

m) Ajustando constantes:

$$\int \frac{x^2}{x^3+2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{x^3+2} dx = \frac{1}{3} \ln(x^3+2) + c$$

n) $\int \frac{3}{1+x^2} dx$. Es inmediata: $\int \frac{3}{1+x^2} dx = 3 \cdot \int \frac{1}{1+x^2} dx = 3 \arctan x + c$.

o) Ajustando constantes:

$$\int \frac{4x^2}{\sqrt{3-x^3}} dx = -\frac{4 \cdot 2}{3} \int \frac{-3x^2}{2\sqrt{3-x^3}} dx = -\frac{8}{3} \int \frac{-3x^2}{2\sqrt{3-x^3}} dx = -\frac{8}{3} \sqrt{3-x^3} + c.$$

p) Ajustando constantes:

$$\int \frac{5x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -5 \int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} dx = -5 \sqrt{1-x^2} + c$$

q) $\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}} dx$. Es inmediata: $\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}} dx = 5 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 5 \arcsin x + c$

r) Ajustando constantes:

$$\int 2xe^{3x^2} dx = \frac{2}{6} \int 6xe^{3x^2} dx = \frac{1}{3} e^{3x^2} + c$$

s) Desarrollando el integrando:

$$\int (1-x)^3 dx = \int (1-3x+3x^2-x^3) dx = x - \frac{3}{2}x^2 + x^3 - \frac{1}{4}x^4 + c$$

También podría hacerse directamente ajustando constantes:

$$\int (1-x)^3 dx = - \int (-1)(1-x)^3 dx = -\frac{(1-x)^4}{4} + c$$

t) Hay que desarrollar el cubo, multiplicar e integrar: $\int x(1-x)^3 dx =$

$$= \int x(1-3x+3x^2-x^3) dx = \int (x-3x^2+3x^3-x^4) dx = \frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 + c$$

u) Hay que desarrollar el cubo, dividir e integrar:

$$\int \frac{(x-1)^3}{x} dx = \int \frac{1-3x+3x^2-x^3}{x} dx = \int \left(\frac{1}{x} - 3 + 3x - x^2 \right) dx = \ln x - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + c$$

2. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int 5x(1-2x)^2 dx$ b) $\int (3x^2-2x)^2 dx$ c) $\int \frac{x}{1+3x^2} dx$

Solución:

a) $\int 5x(1-2x)^2 dx = \int 5x(1-4x+4x^2) dx = \int (5x-20x^2+20x^3) dx = \frac{5}{2}x^2 - \frac{20}{3}x^3 + 5x^4 + c$

b) $\int (3x^2-2x)^2 dx = \int (9x^4-12x^3+4x^2) dx = \frac{9}{5}x^5 - 3x^4 + \frac{4}{3}x^3 + c$

c) $\int \frac{x}{1+3x^2} dx = \frac{1}{6} \int \frac{6x}{1+3x^2} dx = \frac{1}{6} \ln(1+3x^2) + c$

3. Calcula:

a) $\int \frac{2x}{\sqrt{3x^2+1}} dx$ b) $\int \sqrt{x}(7x^2+3) dx$ c) $\int \frac{5x+\sqrt{3x}}{x^2} dx$

Solución:

a) $\int \frac{2x}{\sqrt{3x^2+1}} dx = \frac{2}{3} \int \frac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}} dx = \frac{2}{3} \sqrt{3x^2+1} + c$

$$\text{b)} \int \sqrt{x} (7x^2 + 3) dx = \int (7x^{5/2} + 3x^{1/2}) dx = \frac{7x^{7/2}}{7/2} + \frac{3x^{3/2}}{3/2} + c = 2x^{7/2} + 2x^{3/2} + c$$

$$\text{c)} \int \frac{5x + \sqrt{3x}}{x^2} dx = \int \left(\frac{5}{x} + \sqrt{3}x^{-3/2} \right) dx = 5 \ln x + \frac{\sqrt{3}}{-1/2} x^{-1/2} + c = 5 \ln x - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{x}} + c.$$

4. Resuelve las integrales:

$$\text{a)} \int (\sin 2x - 3 \cos 5x) dx \quad \text{b)} \int (\sin x + \cos x)^2 dx \quad \text{c)} \int (\sin x - \cos x)^2 dx$$

Solución:

$$\text{a)} \int (\sin 2x - 3 \cos 5x) dx = \int \sin 2x dx - \int 3 \cos 5x dx = \frac{1}{2} \int 2 \sin 2x dx - \frac{3}{5} \int 5 \cos 5x dx = \\ = -\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{3}{5} \sin 5x + c$$

$$\text{b)} \int (\sin x + \cos x)^2 dx = \\ = \int (\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x) dx = \int (1 + 2 \sin x \cos x) dx = x + \sin^2 x + c$$

$$\text{c)} \int (\sin x - \cos x)^2 dx = \\ = \int (\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x) dx = \int (1 - 2 \sin x \cos x) dx = x + \cos^2 x + c$$

También se puede escribir:

$$\int (\sin x - \cos x)^2 dx = x - \sin^2 x + c, \text{ pues } x + \cos^2 x = x + (1 - \sin^2 x) + c = x - \sin^2 x + (1 + c)$$

5. Halla:

$$\text{a)} \int e^{4x} dx \quad \text{b)} \int e^{x/3} dx \quad \text{c)} \int x e^{1-x^2} dx$$

$$\text{d)} \int 4^x dx \quad \text{e)} \int 4 \cdot 3^x dx \quad \text{f)} \int 20x \cdot 3^{x^2} dx$$

Solución:

$$\text{a)} \int e^{4x} dx = \frac{1}{4} \int 4e^{4x} dx = \frac{1}{4} e^{4x} + c$$

$$\text{b)} \int e^{x/3} dx = 3 \int \frac{1}{3} e^{x/3} dx = 3e^{x/3} + c$$

$$\text{c)} \int x e^{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int (-2x e^{1-x^2}) dx = -\frac{1}{2} e^{1-x^2} + c$$

$$\text{d)} \int 4^x dx = 4^x \cdot \frac{1}{\ln 4} + c$$

$$\text{e)} \int 4 \cdot 3^x dx = 4 \int 3^x dx = 4 \cdot \frac{3^x}{\ln 3} + c = \frac{4}{\ln 3} 3^x + c$$

$$\text{f)} \int 20x \cdot 3^{x^2} dx = 10 \int 2x \cdot 3^{x^2} dx = 10 \cdot 3^{x^2} \cdot \frac{1}{\ln 3} + c = \frac{10}{\ln 3} \cdot 3^{x^2} + c$$

6. Calcula:

$$\text{a)} \int (e^x + e^{-x}) dx \quad \text{b)} \int (e^x + e^{-x})^2 dx \quad \text{c)} \int (e^{2x} - \sin 2x) dx$$

Solución:

$$\text{a)} \int (e^x + e^{-x}) dx = e^x - e^{-x} + c$$

$$\text{b) } \int (e^x + e^{-x})^2 dx = \int (e^{2x} + e^{-2x} + 2e^x \cdot e^{-x}) dx = \int e^{2x} dx + \int e^{-2x} dx + \int 2 dx =$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + 2x + c$$

$$\text{c) } \int (e^{2x} - \sin 2x) dx = \frac{1}{2} \int 2e^{2x} dx - \frac{1}{2} \int 2 \sin x dx = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}\cos 2x + c$$

7. Resuelve, ajustando constantes, las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int \frac{1}{2+x^2} dx$$

$$\text{b) } \int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$$

$$\text{c) } \int \frac{x-3}{x^2+9} dx$$

Solución:

a) $\int \frac{1}{2+x^2} dx$ es parecida a $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$. Para resolverla hay que ajustar constantes buscando que aparezca $\int \frac{f}{1+f^2} dx = \arctan f + c$. Puede hacerse lo que sigue:

$$\frac{1}{2+x^2} = \frac{1}{2\left(1+\frac{x^2}{2}\right)} = \frac{1}{2\left(1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2\right)} = \frac{\sqrt{2}/\sqrt{2}}{2\left(1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1/\sqrt{2}}{\left(1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1/\sqrt{2}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}.$$

Por tanto:

$$\int \frac{1}{2+x^2} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{1/\sqrt{2}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + c$$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$ es parecida a $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$. Para resolverla hay que ajustar constantes buscando que aparezca $\int \frac{f}{\sqrt{1-f^2}} dx = \arcsin f + c$. Se consigue así:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{16\left(1-\frac{x^2}{16}\right)}} dx = \int \frac{1}{4\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}} dx = \int \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{4}\right) + c$$

$$\text{c) } \int \frac{x-3}{x^2+9} dx = \int \left(\frac{x}{x^2+9} - \frac{3}{x^2+9} \right) dx = \int \frac{x}{x^2+9} dx - \int \frac{3}{x^2+9} dx.$$

La primera integral es casi inmediata: es un neperiano; en ella hay que ajustar constantes. La segunda integral también es casi inmediata, aunque algo más difícil: es un arcotangente. También hay que ajustar constantes.

$$\int \frac{x}{x^2+9} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+9} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+9) + c_1.$$

$$\int \frac{3}{x^2+9} dx = \frac{1}{9} \int \frac{3}{((x/3)^2+1)} dx = \frac{3}{9} \int \frac{3 \cdot (1/3)}{((x/3)^2+1)} dx = \int \frac{1/3}{(x/3)^2+1} dx = \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + c_2.$$

Por tanto:

$$\int \frac{x-3}{x^2+9} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+9) - \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + c.$$