

Ejercicio 1.- (3 puntos) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x} (x - \sqrt{x^2 + x + 1})}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 + 1}{3x - 1} \right)^{\frac{x+2}{x-2}}$

Ejercicio 2.- (2 puntos) Calcula los valores de a y de b para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} x + b & \text{si } x \leq 1 \\ e^{x-1} + ax & \text{si } 1 < x < 3 \\ x^2 - 2x - 2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

sea continua en todo su dominio.

Ejercicio 3.- (2.5 puntos) Calcula las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{-x^2 + 3}{x + 2}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$

Ejercicio 4.- (2.5 puntos) Realiza las siguientes cuestiones:

a) (0.75 puntos) Estudia la continuidad de la función: $f(x) = \frac{x}{1 + \ln(x)}$.

b) (0.75 puntos) Calcula el valor de k para que se verifique: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + kx + 3}{x^3 - x^2 - x + 1} = 2$

c) (0.5 puntos) ¿Existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$? Razona la respuesta.

d) (0.5 puntos) Calcula: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x - 1|}{x^2 - 1}$

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x} (x - \sqrt{x^2 + x + 1})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{x\sqrt{x} - \sqrt{x(x^2+x+1)}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{\infty} \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x} - \sqrt{x+1})}{[x\sqrt{x} - \sqrt{x(x^2+x+1)}](\sqrt{x} - \sqrt{x+1})} = \lim_{\infty} \frac{\cancel{x} - \cancel{x} - 1}{[x\sqrt{x} - \sqrt{x(x^2+x+1)}](\sqrt{x} - \sqrt{x+1})}$$

$$= \frac{-1}{\infty} = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x} + \sqrt{x} - \cancel{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{x}{x}}}{\sqrt{\frac{x}{x} + \frac{x}{x}} + \sqrt{\frac{x}{x}}} = \frac{1}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 + 1}{3x - 1} \right)^{\frac{x+2}{x-2}}$$

$$= \left(\frac{4+1}{6-1} \right)^{\frac{4}{0}} = 1^{\infty} \text{ tipo } e$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(1 + \frac{x^2+1}{3x-1} - 1 \right)^{\frac{x+2}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(1 + \frac{x^2+1-3x+1}{3x-1} \right)^{\frac{x+2}{x-2}}$$

	1	-3	2
x	2	-1	0

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left(1 + \frac{1}{\frac{3x-1}{x^2-3x+2}} \right)^{\frac{x+2}{x-2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-1)(x-1)}{(3x-1)(x-2)}} = e^{\frac{4}{5}}$$

Ejercicio 2.- (2 puntos) Calcula los valores de a y de b para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} x+b & \text{si } x \leq 1 \\ e^{x-1} + ax & \text{si } 1 < x < 3 \\ x^2 - 2x - 2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

sea continua en todo su dominio.

los tres trozos que forman esta función no presenten ninguna discontinuidad en su intervalo.

Estudiaremos la Continuidad en $x=1$ y $x=3$

$x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = b+1 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = e^{1-1} + a = e^0 + a = a+1 \quad f(1) = b+1$$

para ser continua en $x=1 \Rightarrow b+1 = a+1 \Rightarrow \boxed{a=b} \text{ (1)}$

$x=3$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = e^{3-1} + 3a = e^2 + 3a \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 9 - 6 - 2 = 1 \quad f(3) = 1$$

para que $f(x)$ sea continua en $x=3$ se ha de cumplir que

$$\boxed{e^2 + 3a = 1} \Rightarrow 3a = 1 - e^2 \quad \boxed{a = \frac{1 - e^2}{3}} \Rightarrow \text{Sustituyendo en (1)}$$

Como $a = b$

$$\boxed{b = \frac{1 - e^2}{3}}$$

Comprobación gráfica:



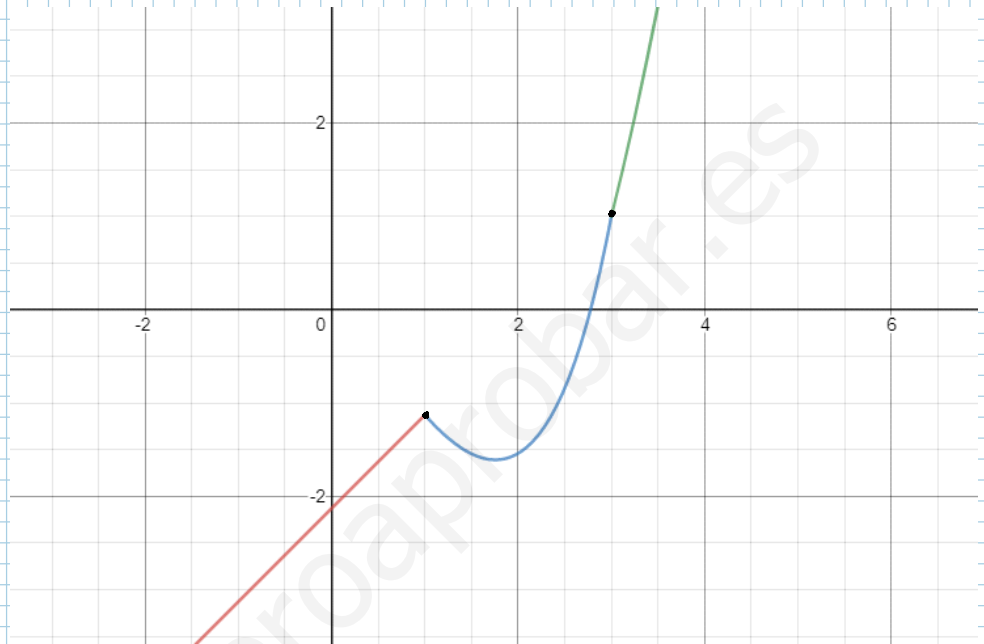
$$x + \frac{(1 - e^2)}{3} \{x \leq 1\}$$



$$e^{(x-1)} + \frac{(1 - e^2)}{3} x \{1 < x < 3\}$$



$$x^2 - 2x - 2 \{x \geq 3\}$$

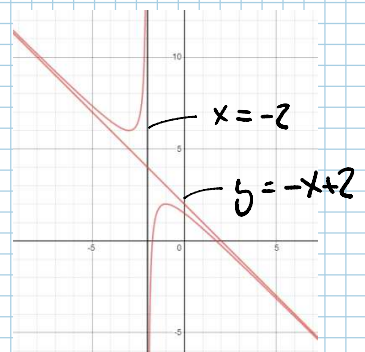


Ejercicio 3.- (2.5 puntos) Calcula las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{-x^2 + 3}{x + 2}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$

a)



a) Horizontals no tiene ya que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

Verticales tiene en $\boxed{x = -2}$ ya que $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \frac{-4 + 3}{0} = \frac{-1}{0} = -\infty$

oblicuas tiene ya que

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x^2 + 3}{x + 2} : x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 3}{x^2 + 2x} = -1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 3}{x + 2} + x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 3 + x^2 + 2x}{x + 2} = 2$$

$$\boxed{y = -x + 2}$$

$$b) y = \sqrt{x^2 + 5}$$

Horizontales no tiene ya que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

Verticales no tiene ya que su dominio es $\mathbb{R}$

Oblicuas

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{5}{x^2}}}{\frac{x}{x}} = \pm 1$$

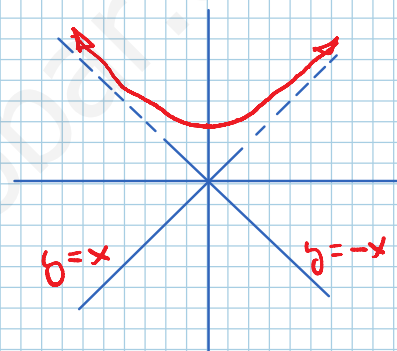
$$n_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 5} - x = \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 5} - x)(\sqrt{x^2 + 5} + x)}{\sqrt{x^2 + 5} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5 - x^2}{\sqrt{x^2 + 5} + x} = \frac{5}{\infty} = 0$$

$$\boxed{y = x}^*$$

$$n_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 5} + x = \infty$$

* realmente hay dos asíntotas, ya que la función es par (simetría eje OY)



Ejercicio 4.- (2.5 puntos) Realiza las siguientes cuestiones:

- a) (0.75 puntos) Estudia la continuidad de la función: $f(x) = \frac{x}{1 + \ln(x)}$.
- b) (0.75 puntos) Calcula el valor de k para que se verifique: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + kx + 3}{x^3 - x^2 - x + 1} = 2$
- c) (0.5 puntos) ¿Existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$? Razona la respuesta.
- d) (0.5 puntos) Calcula: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x - 1|}{x^2 - 1}$

$$a) 1 + \ln x = 0 \quad \ln x = -1 \Rightarrow \log_e x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} \quad x = \frac{1}{e}$$

además $x > 0$ ya que es el dominio de $\ln x$

Estudiaremos la continuidad en $x = 0^+$

y en $x = \frac{1}{e}$

$$\frac{1}{e} \approx 0.368$$

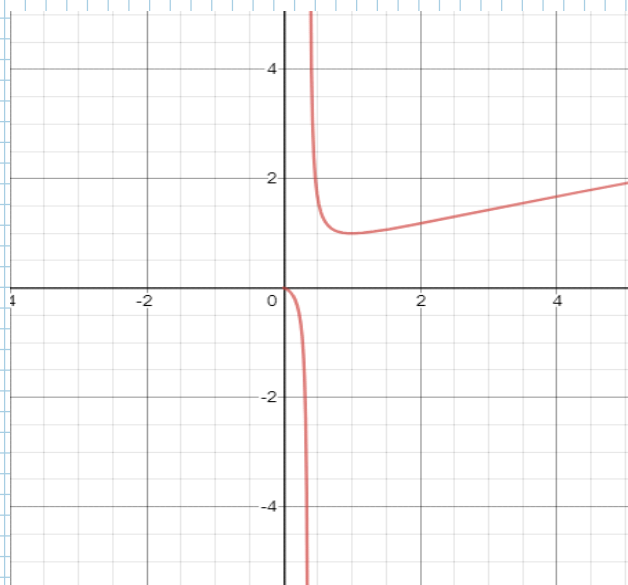
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{0}{1 + \ln 0} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^-} f(x) = \frac{\frac{1}{e}}{1 + \ln \frac{1}{e}} = \frac{\frac{1}{e}}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^+} f(x) = \frac{\frac{1}{e}}{1 + \ln \frac{1}{e}} = \frac{\frac{1}{e}}{0^+} = +\infty$$

$$\text{Dom } f(x) = (0, 1) \cup (1, \infty) \quad \ln x = 1$$

hay discontinuidad de salto infinito



$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + kx + 3}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{1+1+k+3}{1-1-1+1} = \frac{k+5}{0} = \begin{cases} \text{Si } k = -5 \Rightarrow \frac{0}{0} = \text{indeterminación} \\ \text{Si } k \neq -5 \Rightarrow \infty \text{ (no puede dar 2)} \end{cases}$$

Por lo tanto si $k = -5 \Rightarrow$ Hallamos el límite

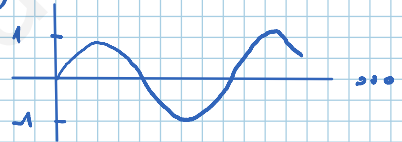
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{4}{2} = 2$$

factorizamos

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+3)(x-1)(x-1)}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{4}{2} = 2 \text{ por lo tanto } k = -5$$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ No existe ya que oscila entre $(-1, 1)$,

pero no tiende a un valor concreto cuando $x \rightarrow \infty$



d) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x^2-1} \Rightarrow$ la convertimos en función a trozos $x-1=0 \Rightarrow x=1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-(x-1)}{x^2-1} & x < 1 \\ \frac{x-1}{x^2-1} & x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{-(x-1)}{(x+1)(x-1)} & x < 1 \\ \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} & x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x+1} & x < 1 \\ \frac{1}{x+1} & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{El } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

