POLINOMIOS

EJERCICIO 1 : Desarrolla y simplifica:

a) $(x-1)(x^2+x)^2-(x^5-5x^4+x^3-x^2)$ **b)** $(2x-3)^2-(2x^2+4x+1)(x-2)$

c) $(x^2-2x+3)(2x+1)-(4x-1)^2$ **d)** $\left(\frac{2}{3}x-1\right)(3x+6)+(x+1)(x-1)-(x+2)^2$

a) $(x-1)(x^2+x)^2-(x^5-5x^4+x^3-x^2)=(x-1)(x^4+2x^3+x^2)-(x^5-5x^4+x^3-x^2)=$

$=x^5+2x^4+x^3-x^4-2x^3-x^2-x^5+5x^4-x^3+x^2=6x^4-2x^3$

b) $(2x-3)^2-(2x^2+4x+1)(x-2)=(4x^2-12x+9)-(2x^3+4x^2+x-4x^2-8x-2)=$

$=4x^2-12x+9-(2x^3-7x-2)=4x^2-12x+9-2x^3+7x+2=-2x^3+4x^2-5x+11$

c) $(x^2-2x+3)(2x+1)-(4x-1)^2=(2x^3+x^2-4x^2-2x+6x+3)-(16x^2-8x+1)=$

$=2x^3-3x^2+4x+3-16x^2+8x-1=2x^3-19x^2+12x+2$

d) $\left(\frac{2}{3}x-1\right)(3x+6)+(x+1)(x-1)-(x+2)^2=(2x^2+4x-3x-6)+(x^2-1)-(x^2+4x+4)=$

$=2x^2+x-6+x^2-1-x^2-4x-4=2x^2-3x-11$

EJERCICIO 2

a) Opera y simplifica: $(x+2)^2-3(x^2-2x+4)$

b) Halla el cociente y el resto de esta división: $(4x^5+2x^3-3x+1):(x^2-2)$

Solución:

a) $(x+2)^2-3(x^2-2x+4)=x^2+4x+4-3x^2+6x-12=-2x^2+10x-8$

b)
$$\begin{array}{rrrr|l}
4x^5 & +\ 2x^3 & -\ 3x & +\ 1 & x^2-2 \\
\hline
-\ 4x^5 & +\ 8x^3 & & & 4x^3+10x \\
\hline
 & 10x^3 & -\ 3x & +\ 1 & \\
 & -\ 10x^3 & +\ 20x & & \\
\hline
 & & 17x & +\ 1 &
\end{array}$$

Cociente = $4x^3 + 10x$ Resto = $17x + 1$

EJERCICIO 3

a) Opera y simplifica: $\left(\frac{1}{2}x+1\right)(2x+2)-(x+1)^2$

b) Halla el cociente y el resto de esta división: $(7x^5-2x^3+3x-2):(x^2+2)$

a) $\left(\frac{1}{2}x+1\right)(2x+2)-(x+1)^2=x^2+x+2x+2-(x^2+2x+1)==x^2+3x+2-x^2-2x-1=x+1$

b)
$$\begin{array}{rrrr|l}
7x^5 & -\ 2x^3 & +\ 3x & -\ 2 & x^2+2 \\
\hline
-\ 7x^5 & -\ 14x^3 & & & 7x^3-16x \\
\hline
 & -\ 16x^3 & +\ 3x & -\ 2 & \\
 & 16x^3 & +\ 32x & & \\
\hline
 & & 35x & -\ 2 &
\end{array}$$

Cociente = $7x^3 - 16x$ Resto = $35x - 2$

EJERCICIO 4 : Calcula el cociente y el resto de cada división:

a) $(2x^5-3x^4+2x^2-x+1):(x^3-2x+1)$ **b)** $(2x^5-3x^3+2x-1):(x+2)$

a)
$$\begin{array}{rrrrrr|l}
2x^5 & -3x^4 & & +2x^2 & -\ x & +\ 1 & x^2+2+1 \\
\hline
-2x^5 & & +4x^3 & -2x^2 & & & 2x^2-3x+4 \\
\hline
 & -3x^4 & +4x^3 & & -\ x & +1 & \\
 & 3x^4 & & -6x^2 & +\ 3x & & \\
\hline
 & & 4x^3 & -6x^2 & +\ 2x & +1 & \\
 & & -4x^3 & & +\ 8x & -4 & \\
\hline
 & & & -6x^2 & +10x & -3 &
\end{array}$$

Cociente = $2x^2 - 3x + 4$ Resto = $-\ 6x^2 + 10x - 3$

b) Aplicamos la regla de Ruffini:

	2	0	–3	0	2	–1
–2		–4	8	–10	20	–44
	2	–4	5	–10	22	–45

Cociente $= 2x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 10x + 22$ Resto $= -45$

<u>EJERCICIO 5</u> : Halla el cociente y el resto de cada división:

a) $\left(2x^4 - 7x^3 + 3x^2 - 1\right) : \left(x^2 + 2\right)$ **b)** $\left(-3x^4 + 6x^2 + x - 2\right) : \left(x - 1\right)$

a)
$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^4 + 7x^3 + & 3x^2 & & -1 & x^2+2 \\
-2x^4 & -4x^2 & & & \overline{2x^2 - 7x - 1} \\ \hline
-7x^3 - & x^2 & & -1 & \\
7x^3 & & +14x & & \\ \hline
- & x^2 & +14x & -1 & \\
 & x^2 & & +2 & \\ \hline
 & & 14x & +1 &
\end{array}$$

Cociente $= 2x^2 - 7x - 1$ Resto $= 14x + 1$

b) Aplicamos la regla de Ruffini:

	–3	0	6	1	–2
1		–3	–3	3	4
	–3	–3	3	4	2

Cociente $= -3x^3 - 3x^2 + 3x + 4$ Resto $= 2$

<u>EJERCICIO 6</u> : Halla el valor de k para que la siguiente división sea exacta: $\left(3x^2 + kx - 2\right) : \left(x + 2\right)$

Solución: Llamamos $P(x) = 3x^2 + kx - 2$.

Para que la división sea exacta, ha de ser $P(-2) = 0$; es decir: $P(-2) = 12 - 2k - 2 = 10 - 2k = 0 \rightarrow k = 5$

<u>EJERCICIO 7</u>

a) Halla el valor numérico de $P(x) = -2x^3 + x^2 - 3x - 6$ para $x = -1$

b) ¿Es divisible el polinomio anterior, $P(x)$, entre $x + 1$?

a) $P(-1) = 2 + 1 + 3 - 6 = 0$

b) Sí. Por el teorema del resto, sabemos que el resto de la división $P(x) : (x + 1)$ coincide con $P(-1)$. En este caso $P(-1) = 0$; por tanto, $P(x)$ es divisible entre $x + 1$.

<u>EJERCICIO 8</u> : Dado el polinomio $P(x) = 4x^3 - 8x^2 + 3x - 1$:

a) Halla el cociente y el resto de la división: $P(x) : (x - 2)$

b) ¿Cuánto vale $P(2)$?

a) Aplicamos la regla de Ruffini:

	4	–8	3	1
2		8	0	6
	4	0	3	5

Cociente $= 4x^2 + 3$ Resto $= 5$

b) Por el teorema del resto, sabemos que $P(2) = 5$.

EJERCICIO 9

a) Halla el valor numérico de $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 2x - 3$ para $x = 1$.

b) ¿Es divisible el polinomio anterior, $P(x)$, entre $x - 1$?

a) $P(1) = 3 - 2 + 2 - 3 = 0$

b) Si. Por el teorema del resto, sabemos que el resto de la división $P(x) : (x - 1)$ coincide con $P(1)$. En este caso $P(1) = 0$, por tanto, $P(x)$ es divisible entre $x - 1$.

EJERCICIO 10 : Opera y simplifica cada una de estas expresiones:

a) $2x(2x + 1) - (2x + 3)^2$ **b)** $\dfrac{4}{x} + \dfrac{x}{x-2}$

c) $(x + 3)(x - 3) - x(3x - 7)$ **b)** $\dfrac{(x+5)^2}{x} : \dfrac{x+5}{3x^3}$

Solución:

a) $2x(2x + 1) - (2x + 3)^2 = 4x^2 + 2x - (4x^2 + 12x + 9) = 4x^2 + 2x - 4x^2 - 12x - 9 = - 10x - 9$

b) $\dfrac{4}{x} + \dfrac{x}{x-2} = \dfrac{4(x-2)}{x(x-2)} + \dfrac{x^2}{x(x-2)} = \dfrac{x^2+4x-8}{x(x-2)} = \dfrac{x^2+4x-8}{x^2-2x}$

c) $(x + 3)(x - 3) - x(3x - 7) = x^2 - 9 - 3x^2 + 7x = - 2x^2 + 7x - 9$

b) $\dfrac{(x+5)^2}{x} : \dfrac{x+5}{3x^3} = \dfrac{3x^3(x+5)^2}{x(x+5)} = 3x^2 \cdot (x+5) = 3x^3 + 15x^2$

EJERCICIO 11 : Opera y simplifica:

a) $(3x + 2)^2 + x^2(x - 9)$ **b)** $\dfrac{3x}{x+2} - \dfrac{5}{x-2}$ **c)** $2(x - 1)^2 - x(1 + 2x)$ **b)** $\dfrac{5x^4}{x-6} : \dfrac{10x^2}{(x-6)^2}$

Solución:

a) $(3x + 2)^2 + x^2(x - 9) = 9x^2 + 12x + 4 + x^3 - 9x^2 = x^3 + 12x + 4$

b) $\dfrac{3x}{x+2} - \dfrac{5}{x-2} = \dfrac{3x(x-2)}{(x+2)(x-2)} - \dfrac{5(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{3x^2-6x-5x-10}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{3x^2-11x-10}{x^2-4}$

c) $2(x - 1)^2 - x(1 + 2x) = 2(x^2 - 2x + 1) - x - 2x^2 = 2x^2 - 4x + 2 - x - 2x^2 = -5x + 2$

b) $\dfrac{5x^4}{x-6} : \dfrac{10x^2}{(x-6)^2} = \dfrac{5x^4(x-6)^2}{10x^2(x-6)} = \dfrac{x^2(x-6)}{2} = \dfrac{x^3-6x^2}{2}$

EJERCICIO 12 : Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^5 + 5x^4 - x^3 - 5x^2$ **b)** $x^5 + x^4 - 4x^3 - 4x^2$ **c)** $x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 18x$

d) $x^4 + 6x^3 - x^2 - 6x$ **e)** $x^4 + 6x^3 - x^2 - 6x$ **f)** $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9$

a) $x^5 + 5x^4 - x^3 - 5x^2$

- Sacamos x^2 factor común: $x^2 (x^3 + 5x^2 - x - 5)$
- Utilizamos la regla de Ruffini para factorizar $x^3 + 5x^2 - x - 5$:

	1	5	–1	–5
1		1	6	5
	1	6	5	0
–1		–1	–5	
	1	5	0	

Por tanto: $x^5 + 5x^4 - x^3 - 5x^2 = x^2 (x - 1) (x + 1) (x + 5)$

b) $x^5 + x^4 - 4x^3 - 4x^2$

- Sacamos x^2 factor común: $x^2 (x^3 + x^2 - 4x - 4)$
- Utilizamos la regla de Ruffini para factorizar $x^3 + x^2 - 4x - 4$:

	1	1	–4	–4
–1		–1	0	4
	1	0	–4	0
2		2	4	
	1	2	0	

Por tanto: $x^5 + x^4 - 4x^3 - 4x^2 = x^2 (x + 1) (x - 2) (x + 2)$

c) $x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 18x$

- Sacamos x factor común: $x (x^3 + 2x^2 - 9x - 18)$
- Utilizamos la regla de Ruffini para factorizar $x^3 + 2x^2 - 9x - 18$:

	1	2	–9	–18
3		3	15	18
	1	5	6	0
–3		–3	–6	
	1	2	0	

Por tanto: $x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 18x = x (x - 3) (x + 3) (x + 2)$

d) $x^4 + 6x^3 - x^2 - 6x$

- Sacamos x factor común: $x (x^3 + 6x^2 - x - 6)$
- Utilizamos la regla de Ruffini para factorizar $x^3 + 6x^2 - x - 6$:

	1	6	–1	–6
1		1	7	6
	1	7	6	0
–1		–1	–6	
	1	6	0	

Por tanto: $x^4 + 6x^3 - x^2 - 6x = x (x - 1) (x + 1) (x + 6)$

e) $x^4 + 6x^3 - x^2 - 6x$

- Sacamos x factor común: $x (x^3 + 6x^2 - x - 6)$
- Utilizamos la regla de Ruffini para factorizar $x^3 + 6x^2 - x - 6$:

	1	6	–1	–6
1		1	7	6
	1	7	6	0
–1		–1	–6	
	1	6	0	

Por tanto: $x^4 + 6x^3 - x^2 - 6x = x (x - 1) (x + 1) (x + 6)$

f) Usamos la regla de Ruffini:

	1	–6	8	6	–9
1		1	–5	3	9
	1	–5	3	9	0
–1		–1	6	–9	
	1	–6	9	0	
3		3	–9		
	1	–3	0		

Luego: $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9 = (x - 1) (x + 1) (x - 3)^2$

EJERCICIO 13

a) Halla el cociente y el resto de la siguiente división: $(3x^5 - 16x^3 + 6x^2 + 7x - 2) : (3x^2 - 1)$

b) Factoriza este polinomio: $2x^4 + 4x^2$

a)

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
3x^5 & & -16x^3 & +6x^2 & +7x & -2 & 3x^2 - 1 \\
\cline{7-7}
-3x^5 & & x^3 & & & & x^3 - 5x + 2 \\
\hline
 & & -15x^3 & +6x^2 & +7x & & \\
 & & 15x^3 & & -5x & & \\
\cline{3-6}
 & & & 6x^2 & +2x & -2 & \\
 & & & -6x^2 & & +2 & \\
\cline{4-6}
 & & & & 2x & &
\end{array}
$$

Cociente $= x^3 - 5x + 2$ Resto $= 2x$

b) $2x^4 + 4x^2 = 2x^2(x^2 + 2)$ (El polinomio $x^2 + 2$ no tiene raíces reales.)

EJERCICIO 14

a) Calcula y simplifica: $(x-3)(x+3)-2x(x^2-5x)$

b) Descompón en factores este polinomio: $3x^3-16x^2+23x-6$

Solución:

a) $(x-3)(x+3)-2x(x^2-5x)=x^2-9-2x^3+10x^2=-2x^3+11x^2-9$

b) Utilizamos la regla de Ruffini:

	3	–16	23	–6
2		6	–20	6
	3	–10	3	0
3		9	–3	
	3	–1	0	

Luego: $3x^3-16x^2+23x-6=(x-2)(x-3)(3x-1)$

EJERCICIO 15 : Factoriza los siguientes polinomios:

a) $2x^4-18x^2$ **b)** $x^4-x^3-x^2-x-2$ **c)** x^3-13x^2+36x

d) $2x^3-9x^2-8x+15$ **e)** $x^5+x^4-2x^3$ **e)** x^3-3x+2

Solución:

a) Sacamos factor común y tenemos en cuenta que $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$:

$2x^4-18x^2=2x^2(x^2-9)=2x^2(x+3)(x-3)$

b) Utilizamos la regla de Ruffini:

	1	–1	–1	–1	–2
–1		–1	2	–1	2
	1	–2	1	–2	0
2		2	0	2	
	1	0	1	0	

$x^4-x^3-x^2-x-2=(x+1)(x-2)(x^2+1)$ (El polinomio x^2+1 no tiene raíces reales).

c) Sacamos factor común y hallamos las otras raíces resolviendo la ecuación de segundo grado:

$x^3-13x^2+36x=x\left(x^2-13x+36\right)$

$$x^2-13x+36=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{13\pm\sqrt{169-144}}{2}=\frac{13\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{13\pm 5}{2}\begin{cases} x=9 \\ x=4 \end{cases}$$

Por tanto: $x^3-13x^2+36x=x(x-9)(x-4)$

d) Utilizamos la regla de Ruffini:

	2	–9	–8	15
1		2	–7	–15
	2	–7	–15	0
5		10	15	
	2	3	0	

$2x^3-9x^2-8x+15=(x-1)(x-5)(2x+3)$

e) Sacamos factor común y hallamos las otras raíces resolviendo la ecuación:

$x^5+x^4-2x^3=x^3(x^2+x-2)$

$$x^2+x-2=0 \to x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2} \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

Por tanto: $x^5+x^4-2x^3=x^3\,(x-1)\,(x+2)$

f) Utilizamos la regla de Ruffini:

	1	0	–3	2
1		1	1	–2
	1	1	–2	0
1		1	2	
	1	2	0	

$x^3-3x+2=(x-1)^2\,(x+2)$

<u>EJERCICIO 16</u> : Opera y simplifica:

a) $\frac{2x}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}$ b) $\frac{x^2-2x+1}{x+3}:\frac{x-1}{x^2-9}$

a) $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x^2+2}{x^2-x}$ b) $\frac{x^2-1}{x+2}\cdot\frac{(x+2)^2}{x^2+2x+1}$

a) $\frac{x-1}{x-2}+\frac{x^2+1}{x^2-4}$ b) $\frac{x^2+x}{2x+4}:\frac{x^2-1}{x+2}$

a) $\frac{2x+1}{x^2-9}+\frac{3}{x+3}$ b) $\frac{x^2+2x}{x^3}\cdot\frac{x^2}{x^2-4}$

a) $\frac{3x^2+1}{x^2+x}-\frac{2x}{x+1}$ b) $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{x}{x+1}$

Solución:

a) $\frac{2x}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}=\frac{2x}{(x-1)(x+1)}-\frac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2x-2x-2}{(x-1)(x+1)}=\frac{-2}{x^2-1}$

b) $\frac{x^2-2x+1}{x+3}:\frac{x-1}{x^2-9}=\frac{(x-1)^2}{(x+3)}:\frac{(x-1)}{(x+3)(x-3)}=\frac{(x-1)^2(x+3)(x-3)}{(x+3)(x-1)}==(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$

a) $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x^2+2}{x^2-x}=\frac{x(x+1)}{x(x-1)}-\frac{x^2+2}{x(x-1)}=\frac{x^2+x-x^2-2}{x(x-1)}=\frac{x-2}{x^2-x}$

b) $\frac{x^2-1}{x+2}\cdot\frac{(x+2)^2}{x^2+2x+1}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)}\cdot\frac{(x+2)^2}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)(x+2)}{x+1}=\frac{x^2+x-2}{x+1}$

a) $\frac{x-1}{x-2}+\frac{x^2+1}{x^2-4}=\frac{(x-1)(x+2)}{(x-2)(x+2)}+\frac{x^2+1}{(x-2)(x+2)}=\frac{x^2+x-2+x^2+1}{(x-2)(x+2)}=\frac{2x^2+x-1}{x^2-4}$

b) $\frac{x^2+x}{2x+4}:\frac{x^2-1}{x+2}=\frac{x(x+1)}{2(x+2)}:\frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)}=\frac{x(x+1)(x+2)}{2(x+2)(x-1)(x+1)}=\frac{x}{2(x-1)}=\frac{x}{2x-2}$

a) $\frac{2x+1}{x^2-9}+\frac{3}{x+3}=\frac{2x+1}{(x-3)(x+3)}+\frac{3(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{2x+1+3x-9}{(x-3)(x+3)}=\frac{5x-8}{x^2-9}$

b) $\frac{x^2+2x}{x^3}\cdot\frac{x^2}{x^2-4}=\frac{x(x+2)}{x^3}\cdot\frac{x^2}{(x+2)(x-2)}=\frac{1}{x-2}$

a) $\frac{3x^2+1}{x^2+x}-\frac{2x}{x+1}=\frac{3x^2+1}{x(x+1)}-\frac{2x^2}{x(x+1)}=\frac{3x^2+1-2x^2}{x(x+1)}=\frac{x^2+1}{x^2+x}$

b) $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{x}{x+1}=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{x}{x+1}=\frac{x^2-1}{x^2}\cdot\frac{x}{x+1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x^2}\cdot\frac{x}{(x+1)}==\frac{x-1}{x}=1-\frac{1}{x}$