OPERACIONES CON POLINOMIOS

Sean los polinomios:

$p(x) = \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - x + 2$

$q(x) = 2x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 2x$

$c(x) = (3x^2 + 2)$

Calcular

a) $5(p(x) - 2q(x)) - (q(x) - p(x)) =$

$= 5p(x) - 10q(x) - q(x) + p(x) =$

$= 6p(x) - 11q(x) =$

$= 6\left(\frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - x + 2\right) - 11(2x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 2x) =$

$= 2x^4 + 3x^2 - 6x + 12 - 22x^4 - 55x^3 + 33x^2 - 22x =$

$= -20x^4 + 36x^2 - 28x + 12 - 55x^3$

b) $c(x)^2 + (2p(x) - q(x)) - (c(x) + p(x)) + 3c(x) =$

$= c(x)^2 + 2p(x) - q(x) - c(x) - p(x) + 3c(x) =$

$= c(x)^2 + p(x) - q(x) + 2c(x) =$

$= (3x^2+2)^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - x + 2 - (2x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 2x) +$

$2\cdot(3x^2+2) =$

c) Calcular: $q(x)\cdot c(x) = (2x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 2x)\cdot(3x^2 + 2) =$

$= 6x^6 + 4x^4 + 15x^5 + 10x^3 - 9x^4 - 6x^2 + 6x^3 + 4x =$

$= 6x^6 - 5x^4 + 15x^5 + 16x^3 - 6x^2 + 4x.$

$= 9x^4 + 4 + 12x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - x + 2 - 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 2x +$

$+ 6x^2 + 4 =$

$= \frac{22}{3}x^4 + 10 + \frac{43}{2}x^2 - 3x - 5x^3$

$$\left(6\,p(x)+\frac{1}{3}\,q(x)\right)-\left(\frac{1}{2}\,p(x)+q(x)\right)+c(x)^3=$$

$$=6\,p(x)+\frac{1}{3}\,q(x)-\frac{1}{2}\,p(x)-q(x)+c(x)^3=$$

$$=\frac{11}{2}\,p(x)-\frac{2}{3}\,q(x)+c(x)^3=$$

$$=\frac{11}{2}\left(\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{2}x^2-x+2\right)-\frac{2}{3}\left(2x^4+5x^3-3x^2+2x\right)+$$

$$\left(3x^2+2\right)^3=$$

$$=\frac{11}{6}x^4+\frac{11}{4}x^2-\frac{11}{2}x+\frac{22}{2}-\frac{4}{3}x^4-\frac{10}{3}x^3+\frac{6}{3}x^2-\frac{4}{3}x+$$

$$(3x^2)^3+2^3+3\cdot(3x^2)^2\cdot 2+3\cdot 3x^2\cdot 2^2=$$

$$=\frac{1}{2}x^4+\frac{19}{4}x^2-\frac{41}{6}x+11-\frac{10}{3}x^3+27x^6+8+54x^4+36x^2=$$

$$=\frac{109}{2}x^4+\frac{163}{4}x^2-\frac{41}{6}x+19-\frac{10}{3}x^3+27x^6$$

¿Cuánto han de valer a y b para que la siguiente división sea exacta?

$$x^4-5x^3+3x^2+\underset{¿?}{a}x+\underset{¿?}{b}:x^2-5x+1$$

Efectuemos primero la división de los dos polinomios.

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{x^4}-\cancel{5x^3}+3x^2+ax+b & x^2-5x+1 \\
\cline{2-2}
-\cancel{x^4}+\cancel{5x^3}\quad -x^2 & x^2+2 \\
\cline{1-1}
\qquad +\cancel{2x^2}+ax+b & \\
\qquad -\cancel{2x^2}+10x-2 & \\
\cline{1-1}
\qquad (10+a)x+(b-2) &
\end{array}$$

Al efectuar la división nos ha dado como polinomio cociente x^2+2.

$C(x) = x^2+2$

$R(x) = (10+a)x + (b-2)$

2 polinomios del mismo grado son iguales cuando sean iguales sus respectivos coeficientes.

Calcular a y b.

$R(x) = 0$

$(10+a)x + (b-2) = 0x + 0$

$10 + a = 0 \Rightarrow a = -10$

$b - 2 = 0 \Rightarrow b = 2$

Calcula el cociente y el resto de las divisiones.

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{x^4} - 4x^2 + 12x - 9 & x^2 - 2x + 3 \\
\cline{2-2}
-\cancel{x^4} + 2x^3 - 3x^2 & x^2 + 2x - 3 \\
\hline
+\cancel{2x^3} - 7x^2 + 12x - 9 & \\
-\cancel{2x^3} + 4x^2 - 6x & \\
\hline
-3x^2 + 6x - 9 & \\
+3x^2 - 6x + 9 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

$R(x) = 0$

$C(x) = x^2 + 2x - 3$

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{3x^3} - 5x^2 + 7x - 3 & x^2 - 1 \\
\cline{2-2}
-\cancel{3x^3} + 3x & 3x - 5 \\
\hline
-\cancel{5x^2} + 10x - 3 & \\
+\cancel{5x^2} - 5 & \\
\hline
10x - 8 &
\end{array}
$$

$C(x) = 3x - 5$

$R(x) = 10x - 8$

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{3x^4} - x^2 - 1 & 3x^2 - 3x - 4 \\
\cline{2-2}
-\cancel{3x^4} + 3x^3 + 4x^2 & x^2 + x + 2 \\
\hline
\cancel{3x^3} + 3x^2 - 1 & \\
\cancel{3x^3} + 3x^2 + 4x & \\
\hline
\cancel{6x^2} + 4x - 1 & \\
-\cancel{6x^2} + 6x + 8 & \\
\hline
10x + 7 &
\end{array}
$$

$C(x) = x^2 + x + 2$

$R(x) = 10x + 7$

$$
\begin{array}{l|l}
6x^5 + 9x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 8x + 5 & 3x^2 - 3x - 1 \\
\cline{2-2}
-\ \cancel{6x^5} + 6x^4 + 2x^3 & 2x^3 + 5x^2 + \frac{10}{3}x + \frac{22}{3} \\
\cline{1-1}
\quad\quad + \cancel{15x^4} - 5x^3 + 7x^2 - 8x + 5 & \\
\quad\quad - \cancel{15x^4} + 15x^3 + 5x^2 & \\
\cline{1-1}
\quad\quad\quad\quad + \cancel{10x^3} + 12x^2 - 8x + 5 & \\
\quad\quad\quad\quad - \cancel{10x^3} + 10x^2 + \frac{10}{3}x & \\
\cline{1-1}
\quad\quad\quad\quad\quad\quad + \cancel{22x^2} - \frac{14}{3}x + 5 & \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad - \cancel{22x^2} + 22x + \frac{22}{3} & \\
\cline{1-1}
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \frac{52}{3}x + \frac{37}{3} &
\end{array}
$$

$$-8 + \frac{10}{3} = \frac{-24+10}{3} = \frac{-14}{3}$$

$$-\frac{14}{3} + 22 = \frac{-14+66}{3} = \frac{52}{3}$$

$$5 + \frac{22}{3} = \frac{15+22}{3} = \frac{37}{3}$$

$$C(x) = 2x^3 + 5x^2 + \frac{10}{3}x + \frac{22}{3}$$

$$R(x) = \frac{52}{3}x + \frac{37}{3}$$