

Ecuaciones exponenciales

Resuelve las siguientes exponenciales

Ejercicio 1 $3^{\frac{x}{6}} = 9^{\frac{6}{7}}$

$$3^{\frac{x}{6}} = 9^{\frac{6}{7}} \rightarrow 3^{\frac{x}{6}} = (3^2)^{\frac{6}{7}} = 3^{\frac{12}{7}} \rightarrow \frac{x}{6} = \frac{12}{7}$$
$$x = \frac{22}{7}$$

Ejercicio 2 $\sqrt{4^{2x-2}} = 16$

Como $\sqrt{A^k} = A^{\frac{k}{2}}$ entonces; $\sqrt{4^{2x-2}} = 4^{\frac{2x-2}{2}} = 4^{x-1} = (2^2)^{x-1} = 2^{2x-2}$

Por lo tanto la ecuación $\sqrt{4^{2x-2}} = 16$ queda así:

$$2^{2x-2} = 16 = 2^4 \rightarrow 2x - 2 = 4$$

$$x = 3$$

Ejercicio 3 $3^{x^2-5x} = \frac{1}{729}$

$$3^{x^2-5x} = \frac{1}{729} = \frac{1}{3^6} = 3^{-6} \rightarrow x^2 - 5x = -6 \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Ejercicio 4 $3^{9x^4-10x^2+1} = 1$

$$3^{9x^4-10x^2+1} = 1 = 3^0 \rightarrow 9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$$

Resolviendo la ecuación bicuadrada tendremos:

$$x^2 = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{18} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{18} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \frac{1}{9} \end{array} \right.$$

Con lo que:

$$\left| \begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \end{array} \right| \qquad \left| \begin{array}{l} x^2 = \frac{1}{9} \\ x = \begin{cases} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{cases} \end{array} \right|$$

Ejercicio 5 $\frac{110}{11^x} + 1 = 11^x$

Multiplicando la ecuación por 11^x tendremos:

$$110 + 11^x = (11^x)^2$$

Transponiendo términos, obtenemos la siguiente ecuación de segundo grado:

$$(11^x)^2 - 11^x - 110 = 0$$

Resolviéndola

$$11^x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 440}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{441}}{2} = \frac{1 \pm 21}{2} = \begin{cases} 11 \\ -10 \end{cases}$$

obtenemos las siguientes ecuaciones exponenciales elementales.

$$\left| \begin{array}{l} 11^x = 11 = 11^1 \\ x = 1 \end{array} \right| \qquad \left| \begin{array}{l} 11^x = -10 \\ \text{Imposible; ya que } 11^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right|$$

Ejercicio 6 $2 \cdot 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 64$

$$2 \cdot 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 64 \rightarrow 2 \cdot 2^x + 2^x \cdot 2 + 2^x \cdot 2^2 = 64$$

Sacando factor común 2^x a la izquierda de la ecuación:

$$2^x(2 + 2 + 4) = 64 \rightarrow 2^x \cdot 8 = 64 \rightarrow \boxed{2^x} = \frac{64}{8} = 8 = \boxed{2^3}$$

$$x = 3$$

Ejercicio 7 $2^x = \frac{1}{2^{x-1}} - 1$

$$\text{Como } \frac{1}{2^{x-1}} = \frac{1}{\frac{2^x}{2}} = \frac{2}{2^x}$$

La ecuación inicial queda así:

$$2^x = \frac{2}{2^x} - 1$$

Si multiplicamos la ecuación por 2^x

$$(2^x)^2 = 2 - 2^x$$

transponiendo términos, obtenemos la ecuación de segundo grado siguiente:

$$(2^x)^2 + 2^x - 2 = 0$$

Resolviéndola :

$$2^x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases}$$

obtenemos las siguientes ecuaciones exponenciales elementales.

$$\left| \begin{array}{l} 2^x = 1 = 2^0 \\ x = 0 \end{array} \right| \qquad \left| \begin{array}{l} 2^x = -4 \\ \text{Imposible; ya que } 2^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right|$$

Ejercicio 8 $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} - 31 = 0$

$$5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} - 31 = 0 \rightarrow 5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 31$$

$$5^x + 5^x \cdot 5 + 5^x \cdot 5^2 = 31$$

Sacando factor común 5^x

$$5^x(1 + 5 + 25) = 31 \rightarrow 5^x \cdot 31 = 31 \rightarrow \boxed{5^x} = \frac{31}{31} = 1 = \boxed{5^0}$$

$$x = 0$$

Ejercicio 9 $2^x - 3 \cdot 2^{2x-1} + 5 \cdot 2^{x-2} + 78 = 0$

$$2^x - 3 \cdot 2^{2x-1} + 5 \cdot 2^{x-2} + 78 = 0 \rightarrow 2^x - 3 \cdot \frac{2^{2x}}{2} + 5 \cdot \frac{2^x}{2^2} + 78 = 0$$

Si multiplicamos por 4

$$4 \cdot 2^x - 6 \cdot 2^{2x} + 5 \cdot 2^x + 312 = 0 \rightarrow -6 \cdot 2^{2x} + 9 \cdot 2^x + 312 = 0$$

Como $2^{2x} = (2^x)^2$; entonces:

$$-6 \cdot 2^{2x} + 9 \cdot 2^x + 312 = 0 \rightarrow -6 \cdot (2^x)^2 + 9 \cdot 2^x + 312 = 0$$

Tenemos una ecuación de segundo grado cuya incógnita a determinar es 2^x . Resolviéndola:

$$2^x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 7488}}{-12} = \frac{-9 \pm \sqrt{7569}}{-12} = \frac{-9 \pm 87}{-12} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{78}{12} \\ 8 \end{array} \right.$$

obtenemos las siguientes ecuaciones exponenciales elementales.

$$\left| \begin{array}{l} 2^x = 8 = 2^3 \\ x = 3 \end{array} \right| \qquad \left| \begin{array}{l} 2^x = -\frac{78}{12} \\ \text{Imposible; ya que } 2^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right|$$

Ejercicio 10 $4^x - 3 \cdot 2^x - 40 = 0$

Como $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$ entonces:

$$4^x - 3 \cdot 2^x - 40 = 0 \rightarrow (2^x)^2 - 3 \cdot 2^x - 40 = 0$$

Tenemos una ecuación de segundo grado cuya incógnita a determinar es 2^x . Resolviéndola:

$$2^x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 160}}{2} = \frac{3 \pm 13}{2} = \left\{ \begin{array}{l} 8 \\ -5 \end{array} \right.$$

obtenemos las siguientes ecuaciones exponenciales elementales.

$$\left| \begin{array}{l} 2^x = 8 = 2^3 \\ x = 3 \end{array} \right| \qquad \left| \begin{array}{l} 2^x = -5 \\ \text{Imposible; ya que } 2^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right|$$

Ejercicio 11 $2^{3x-1} + 2^{6x-4} - 8 = 0$

$$2^{3x-1} + 2^{6x-4} - 8 = 0 \rightarrow \frac{2^{3x}}{2} + \frac{2^{6x}}{2^4} - 8 = 0$$

Multiplicando la ecuación por 16

$$8 \cdot 2^{3x} + 2^{6x} - 128 = 0$$

Como $2^{6x} = (2^{3x})^2$ entonces; obtenemos la siguiente ecuación de segundo grado (incógnita 2^{3x}):

$$(2^{3x})^2 + 8 \cdot 2^{3x} - 128 = 0$$

Resolviéndola

$$2^{3x} = \frac{-8 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{-8 \pm 24}{2} = \begin{cases} 8 \\ -16 \end{cases}$$

obtenemos las siguientes ecuaciones exponenciales elementales.

$$\left| \begin{array}{l} 2^{3x} = 8 = 2^3 \\ x = 1 \end{array} \right| \qquad \left| \begin{array}{l} 2^{3x} = -16 \\ \text{Imposible; ya que } 2^{3x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right|$$

Ejercicio 13 $27^x + 9^{3x} - 12 = 0$

$$\text{Como } \left[\begin{array}{l} 27^x = (3^3)^x = 3^{3x} \\ y \\ 9^{3x} = (3^2)^{3x} = (3^{3x})^2 \end{array} \right] \text{ entonces:}$$

$$27^x + 9^{3x} - 12 = 0 \rightarrow 3^{3x} + (3^{3x})^2 - 12 = 0 \rightarrow (3^{3x})^2 + 3^{3x} - 12 = 0$$

Tenemos una ecuación de segundo grado cuya incógnita a determinar es 3^{3x} . Resolviéndola:

$$3^{3x} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$$

obtenemos las siguientes ecuaciones exponenciales elementales.

$$\left| \begin{array}{l} 3^{3x} = 3 = 3^1 \\ x = \frac{1}{3} \end{array} \right| \qquad \left| \begin{array}{l} 3^{3x} = -4 \\ \text{Imposible; ya que } 3^{3x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right|$$

Ejercicio 14 $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^{4x} + 4^{2x} + 12 = 0$

$$\text{Como } \left[\begin{array}{l} 4^x = (2^2)^x = (2^{2x}) \\ y \\ 2^{4x} = (2^{2x})^2 \\ 4^{2x} = (2^2)^{2x} = (2^{2x})^2 \end{array} \right] \text{ entonces:}$$

$$2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^{4x} + 4^{2x} + 12 = 0 \rightarrow 2 \cdot (2^{2x}) - 5 \cdot (2^{2x})^2 + (2^{2x})^2 + 12 = 0$$

reduciendo términos y ordenándolos:

$$-4 \cdot (2^{2x})^2 + 2 \cdot (2^{2x}) + 12 = 0$$

Si dividimos por -2

$$2 \cdot (2^{2x})^2 - 1 \cdot (2^{2x}) - 6 = 0$$

obtenemos una ecuación de segundo grado en 2^x . Resolviéndola:

$$(2^{2x}) = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{3}{2} \end{cases}$$

obtenemos las siguientes ecuaciones exponenciales elementales.

$$\left| \begin{array}{l} 2^{2x} = 2 = 2^1 \\ x = \frac{1}{2} \end{array} \right| \qquad \left| \begin{array}{l} 2^{2x} = -\frac{3}{2} \\ \text{Imposible; ya que } 2^{2x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right|$$

Ejercicio 15 $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = \frac{5^{x+3}}{2} - \frac{315}{2}$

$$5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = \frac{5^{x+3}}{2} - \frac{315}{2} \rightarrow 5^x + 5^x \cdot 5 + 5^x \cdot 5^2 = \frac{5^x \cdot 5^3}{2} - \frac{315}{2}$$

Transponemos el término $\frac{5^x \cdot 5^3}{2}$ a la izquierda de la ecuación

$$5^x + 5^x \cdot 5 + 5^x \cdot 5^2 - \frac{5^x \cdot 5^3}{2} = -\frac{315}{2} \text{ y sacamos factor común } 5^x.$$

$$5^x \left(1 + 5 + 5^2 - \frac{5^3}{2} \right) = -\frac{315}{2}$$

Operando

$$5^x \left(31 - \frac{125}{2} \right) = -\frac{315}{2} \rightarrow 5^x \left(-\frac{63}{2} \right) = -\frac{315}{2} \rightarrow 5^x = \frac{315}{63} = 5$$

$$x = 1$$

Ejercicio 16 $3^{2-x} + 2 \cdot 3^{3-x} = 7$

$$3^{2-x} + 2 \cdot 3^{3-x} = 7 \rightarrow \frac{3^2}{3^x} + 2 \cdot \frac{3^3}{3^x} = 7 \rightarrow \frac{9}{3^x} + \frac{54}{3^x} = 7$$

$$\frac{63}{3^x} = 7 \rightarrow 3^x = 9 = 3^2 \rightarrow x = 2$$

Ejercicio 17 $2^{x+2} + 4^{x+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 23$

$$\text{Como } \left[\begin{array}{l} 2^{x+2} = 2^x \cdot 2^2 = 4 \cdot (2^x) \\ 4^{x+1} = (2^2)^{x+1} = 2^{2x+2} = 2^{2x} \cdot 2^2 = 4 \cdot (2^x)^2 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = (2^{-1})^{x-1} = 2^{-x+1} = \frac{2}{2^x} \end{array} \right] \text{ entonces:}$$

$$2^{x+2} + 4^{x+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 23 \rightarrow 4 \cdot (2^x) + 4 \cdot (2^x)^2 - \frac{2}{2^x} = 23$$

Si multiplicamos por 2^x
 $4 \cdot (2^x)^2 + 4 \cdot (2^x)^3 - 2 = 23 \cdot 2^x$. Transponiendo términos y ordenando obtenemos la siguiente ecuación de tercer grado (en 2^x)

$$4 \cdot (2^x)^3 + 4 \cdot (2^x)^2 - 23 \cdot 2^x - 2 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 4 & 4 & -23 & -2 \\ \hline & 4 & 12 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$(2^x - 2) [4 \cdot (2^x)^2 + 12 \cdot 2^x + 1] = 0$$

Como un producto de dos factores es cero cuando al menos alguno de ellos es cero.

$$(2^x - 2) [4 \cdot (2^x)^2 + 12 \cdot 2^x + 1] = 0 \rightarrow \begin{cases} 2^x - 2 = 0 \rightarrow 2^x = 2 \rightarrow x = 1 \\ 4(2^x)^2 + 12(2^x) + 1 = 0 \rightarrow 2^x = \begin{cases} -6 + 4\sqrt{2} \approx -0.34 \\ -6 - 4\sqrt{2} \approx -11.66 \end{cases} \end{cases}$$

Las ecuaciones exponenciales elementales $2^x = \begin{cases} -6 + 4\sqrt{2} \approx -0.34 \\ -6 - 4\sqrt{2} \approx -11.66 \end{cases}$
 no tienen solución ;ya que $2^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Ejercicio 19 $a^{x+2} \cdot a^{x-1} = a^{x^2+1}$ siendo $a > 0$

$$a^{x+2} \cdot a^{x-1} = a^{x^2+1} \rightarrow a^{2x+1} = a^{x^2+1} \rightarrow 2x + 1 = x^2 + 1 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ejercicio 20 $\frac{\sqrt{x a^2}}{\sqrt[3x]{a^4}} = \sqrt[3]{a^{x^2-3}}$ siendo $a > 0$

$$\frac{\sqrt{x a^2}}{\sqrt[3x]{a^4}} = \sqrt[3]{a^{x^2-3}} \rightarrow \frac{a^{\frac{x}{2}}}{a^{\frac{4}{3x}}} = a^{\frac{x^2-3}{3}} \rightarrow a^{\frac{x}{2} - \frac{4}{3x}} = a^{\frac{x^2-3}{3}}$$

$$\frac{x}{2} - \frac{4}{3x} = \frac{x^2-3}{3}$$

Multiplicando por $3x$

$$6 - 4 = x^3 - 3x$$

Transponiendo términos y ordenando

$$x^3 - 3x - 2 = 0$$

Para resolver esta ecuación, utilizaremos la regla de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$x^3 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \\ x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases} \end{cases}$$

Ejercicio 21 $\sqrt{a^{\frac{6}{x}}}\sqrt{a^{x^2}} = \sqrt[3]{a^{-x}}\sqrt[6]{a^{11x+3}}$ siendo $a > 0$

$$a^{\frac{-x}{3} + \frac{11x+3}{6}} = \sqrt[3]{a^{-x}}\sqrt[6]{a^{11x+3}} \rightarrow a^{\frac{6}{2x}}a^{\frac{x^2}{4}} = a^{\frac{-x}{3}}a^{\frac{11x+3}{6}} \rightarrow a^{\frac{6}{2x} + \frac{x^2}{4}} =$$

$$\frac{6}{2x} + \frac{x^2}{4} = \frac{-x}{3} + \frac{11x+3}{6}$$

Multiplicando por 12x

$$36 + 3x^3 = -4x^2 + 22x^2 + 6x$$

Reduciendo, transponiendo y ordenando términos

$$3x^3 - 18x^2 - 6x + 36 = 0$$

dividiendo por 3

$$x^3 - 6x^2 - 2x + 12 = 0$$

Para resolver esta ecuación, utilizaremos la regla de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} 6 & 1 & -6 & -2 & +12 \\ & & 6 & 0 & -122 \\ \hline & 1 & 0 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$x^3 - 6x^2 - 2x + 12 = 0 \Leftrightarrow (x-6)(x^2-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x-6=0 \rightarrow x=6 \\ x^2-2=0 \rightarrow x = \begin{cases} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$$

Ejercicio 22 $\frac{\sqrt[4]{a^{x^2-1}}}{a^3} = \sqrt[3]{a^{x+4}}$ siendo $a > 0$

$$\frac{\sqrt[4]{a^{x^2-1}}}{a^3} = \sqrt[3]{a^{x+4}} \rightarrow \frac{a^{\frac{x^2-1}{4}}}{a^3} = a^{\frac{x+4}{3}} \rightarrow a^{\frac{x^2-1}{4}-3} = a^{\frac{x+4}{3}}$$

$$\frac{x^2-1}{4} - 3 = \frac{x+4}{3}$$

Multiplicando por 12

$$3x^2 - 3 - 36 = 4x + 16$$

Transponiendo términos y ordenando

$$3x^2 - 4x - 55 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} 5 \\ -\frac{11}{3} \end{cases}$$

Ejercicio 23 $a^{x^2-x+1} = \frac{1}{a^{\sqrt{2}-3}}$ siendo $a > 0$

$$a^{x^2-x+1} = \frac{1}{a^{\sqrt{2}-3}} \rightarrow a^{x^2-x+1} = a^{-\sqrt{2}+3}$$

$$x^2 - x + 1 = -\sqrt{2} + 3 \rightarrow x^2 - x + (-2 + \sqrt{2}) = 0$$

Resolviéndola

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-2 + \sqrt{2})}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9 - 4\sqrt{2}}}{2} = \frac{1 \pm (2\sqrt{2} - 1)}{2} =$$
$$x = \begin{cases} \sqrt{2} \\ 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Ejercicio 24 $a^{3x+5} - a^{2x} = 0$ siendo $a > 0$

$$a^{3x+5} - a^{2x} = 0 \rightarrow a^{3x+5} = a^{2x}$$

Como $a > 0$;podemos dividir la ecuación por a^{2x} . Con lo que obtenemos la ecuación:

$$\frac{a^{3x+5}}{a^{2x}} = \frac{a^{2x}}{a^{2x}} \rightarrow a^{x+5} = 1 = a^0$$

De donde

$$x + 5 = 0 \rightarrow x = -5$$

Ejercicio 25 $2^{3x-1} \cdot 3^{3x+6} = 27^{x+2} \cdot 16$

$$2^{3x-1} \cdot 3^{3x+6} = 27^{x+2} \cdot 16 \rightarrow 2^{3x-1} \cdot 3^{3x+6} = 3^{3x+6} \cdot 16$$

Dividiendo por 3^{3x+6}

$$2^{3x-1} = 16 = 2^4 \rightarrow 3x - 1 = 4 \rightarrow x = \frac{5}{3}$$

Ejercicio 26 $\frac{8^x + 16}{2} = 8^{x-1} + \frac{19}{2}$

$$\frac{8^x + 16}{2} = 8^{x-1} + \frac{19}{2} \rightarrow \frac{8^x + 16}{2} = \frac{8^x}{8} + \frac{19}{2}$$

Multiplicando por 8

$$4 \cdot 8^x + 64 = 8^x + 76$$

Aislado 8^x

$$3 \cdot 8^x = 12 \rightarrow 8^x = 4 \rightarrow (2^3)^x = 2^2 \rightarrow 2^{3x} = 2^2 \rightarrow 3x = 2$$

$$x = \frac{2}{3}$$

Ejercicio 27 $4^{2x+1} - 3 \cdot 4^x - 10 = 0$

Como $4^{2x+1} = 4 \cdot (4^x)^2$ entonces:

$$4^{2x+1} - 3 \cdot 4^x - 10 = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot (4^x)^2 - 3 \cdot 4^x - 10 = 0$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado

$$4^x = \frac{3 \pm \sqrt{169}}{8} = \frac{3 \pm 13}{8} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{5}{4} \end{cases}$$

obtenemos las siguientes ecuaciones exponenciales elementales.

$$\left| \begin{array}{l} 2^{2x} = 4^x = 2^1 \\ x = \frac{1}{2} \end{array} \right| \qquad \left| \begin{array}{l} 4^x = -\frac{5}{4} \\ \text{Imposible; ya que } 4^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right|$$

Ejercicio 28 Resuelve tú $4^x - 16^x = 4^{2x-1} - 3$