Las funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas son las funciones derivadas de las razones trigonométricas de un ángulo. En general, el ángulo sobre el cual se calculan las razones trigonométricas se expresa en radianes.

Esta tabla recoge las principales características de las distintas funciones trigonométricas:

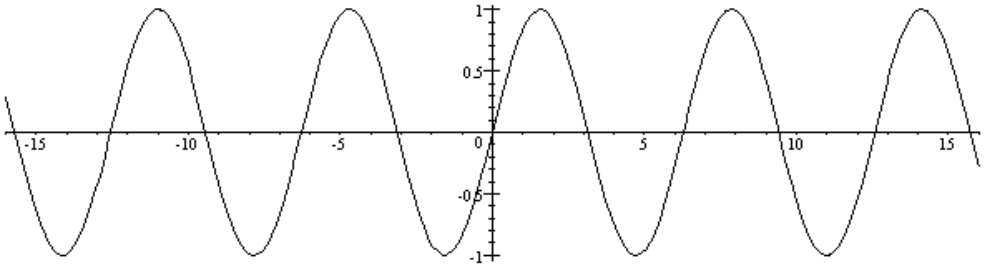
	funciones trigonométricas					
	seno sen x (o sin x)	coseno cos x	tangente tg x	secante sec x	cosecante cosec x	cotangente cotg x
Dominio	Todos los reales	Todos los reales	Los reales excepto $\pi/2 + k\pi$, donde k es un entero	Los reales excepto $k\pi$, donde k es un entero	Los reales excepto $\pi/2 + k\pi$, donde k es un entero	Los reales excepto $k\pi$, donde k es un entero
Imagen	$[-1,1]$	$[-1,1]$	Todos los reales	Todos los reales menos $(-1,1)$	Todos los reales menos $(-1,1)$	Todos los reales
Puntos de corte	$(k\pi,0)$ donde k es un número entero	$((2k + 1)\pi/2,0)$ donde k es un número entero, y $(0,1)$	$(k\pi, 0)$ donde k es un número entero	$(0,1)$	ninguno	$((2k + 1)\pi/2,0)$ donde k es un número entero
Crecimiento	decreciente: $((4k + 1)\pi/2,(4k + 3)\pi/2)$ creciente: $((4k + 3)\pi/2,(4k + 5)\pi/2)$	decreciente: $(2k\pi, (2k + 1)\pi)$ creciente: $((2k + 1)\pi, (2k + 2)\pi)$	siempre creciente	creciente: $(2k\pi, (2k + 1)\pi)$ decreciente: $((2k + 1)\pi, (2k + 2)\pi)$	creciente: $((4k + 1)\pi/2,(4k + 3)\pi/2)$ decreciente: $((4k + 3)\pi/2,(4k + 5)\pi/2)$	siempre decreciente
Máximos	$((4k + 1)\pi/2,1)$ donde k es un número entero	$(2k\pi, 1)$ donde k es un número entero.	no tiene	$((4k + 3)\pi/2,-1)$ donde k es un número entero	$((2k + 1)\pi,-1)$ donde k es un número entero	no tiene
Mínimos	$((4k + 3)\pi/2,-1)$ donde k es un número entero	$((2k + 1)\pi,-1)$ donde k es un número entero.		$((4k + 1)\pi/2,1)$ donde k es un número entero	$(2k\pi,1)$ donde k es un número entero	

Las funciones inversas de las funciones seno, coseno y tangente son las funciones arco seno, arco coseno y arco tangente. Las gráficas de dichas funciones son simétricas respecto a la recta $y = x$, tal como sucede con todas las funciones inversas.

- La función inversa de la función seno: solamente se utilizan los valores de los ángulos entre $[-\pi/2,\pi/2]$. Se designa con el símbolo arc sen.
- La función inversa de la función coseno: solamente se utilizan los valores de los ángulos entre $[0, \pi]$. Dicha función se designa con el símbolo arc cos.
- La función inversa de la función tangente se denomina arco tangente: solamente se utilizan los valores de los ángulos entre $(-\pi/2,\pi/2)$. Dicha función se designa con el símbolo arc tan.

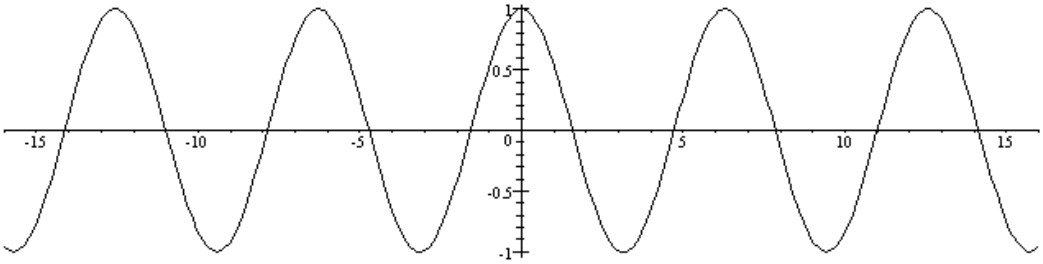
Gráficas de las funciones trigonométricas

Función seno

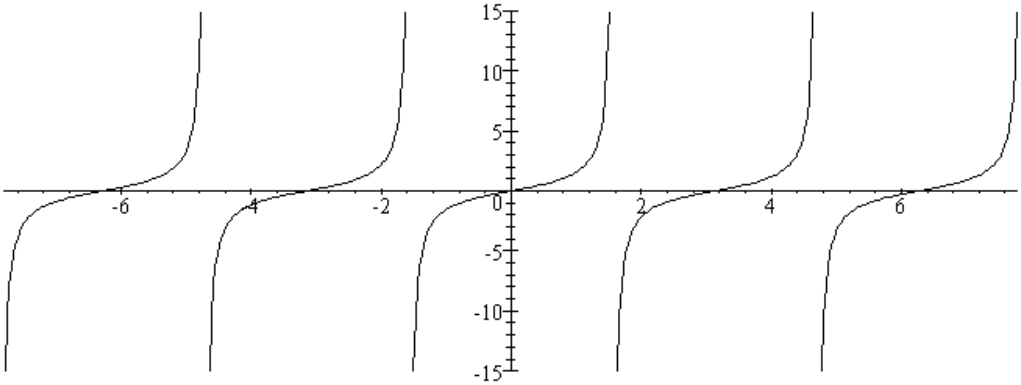


$y = \text{sen}\, x$

Función coseno



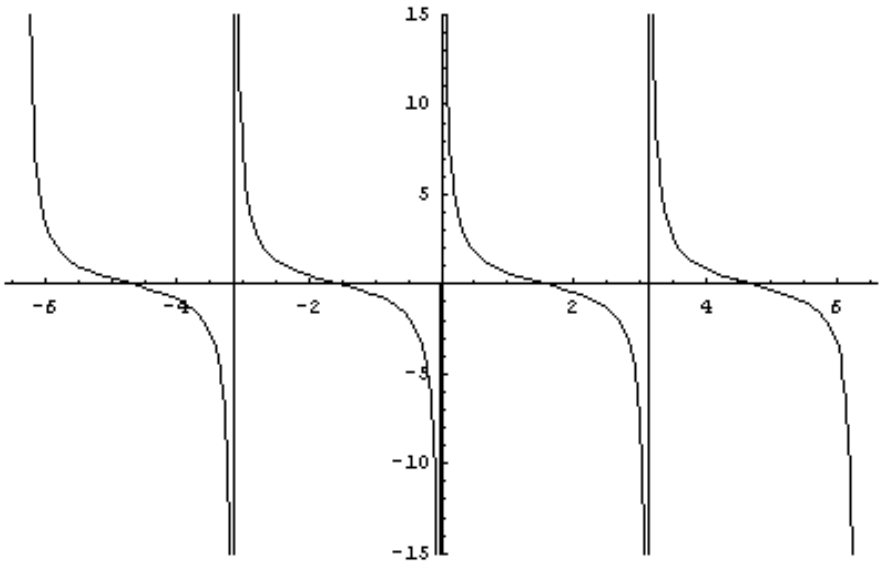
$y = \cos x$



Función tangente

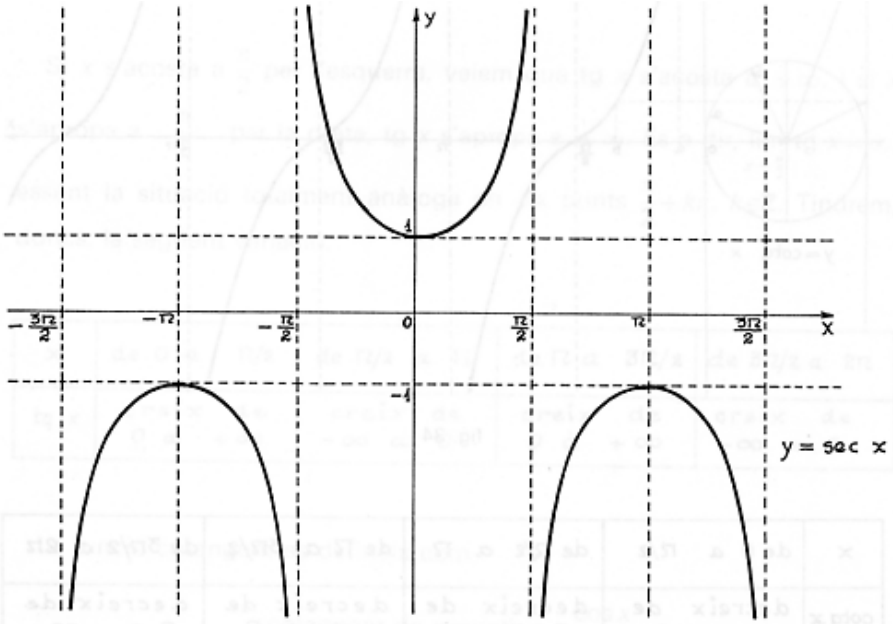
$y = \text{tg}\, x$

Función cotangente

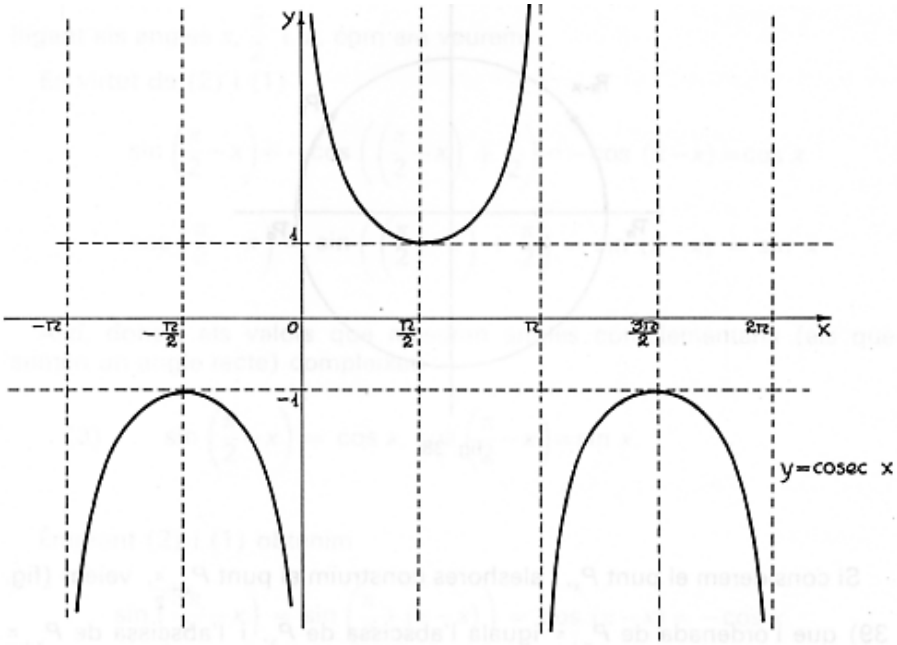


$y = \text{cotg}\, x$

Función secante

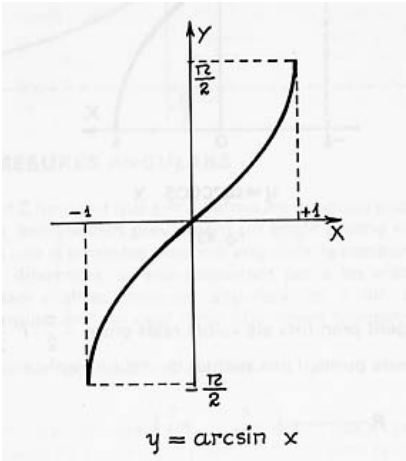


Función cosecante:

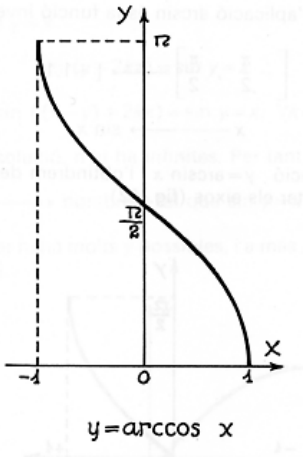


Funciones inversas

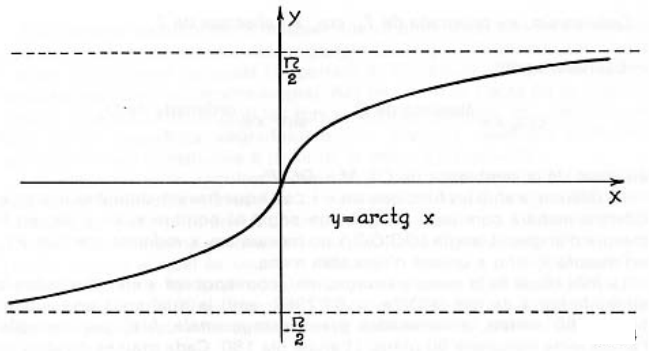
función arco seno



función arco coseno



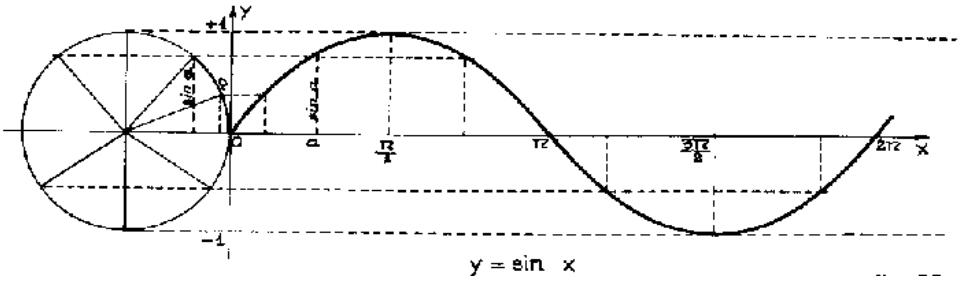
Función arco tangente



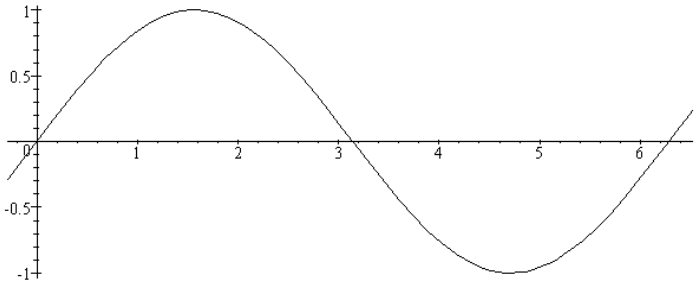
¿Qué es la función seno y cuáles son sus características?

> Una función trigonométrica es una función asociada a una de las razones trigonométricas. Las más importantes son la función seno, la función coseno y la función tangente. La función seno es aquella función que a cada valor (en radianes) le hace corresponder su seno. La función seno es una función periódica, de período 2π. Su dominio son todos los números y su imagen es [–1,1].

Las funciones circulares o trigonométricas son las funciones asociadas a las razones trigonométricas; las más importantes son la función seno, la función coseno y la función tangente. La variable de estas funciones circulares siempre se expresa en radianes y no en grados sexagesimales.
La función seno es aquella función que asocia a un ángulo en radianes, su seno; la gráfica de esta función se construye como sigue, cuando el ángulo se encuentra entre 0 y 2π:



Cada valor del seno en la circunferencia unidad de la izquierda se traslada a su posición correspondiente en el valor del ángulo en el eje de abscisas. Así, por ejemplo, sen $\pi/2 = 1$, o sen $\pi = -1$; si α es del primer cuadrante, sen$(\pi - \alpha)$ = sen α (Nota: usaremos indistintamente la denominación sen x o sin x para esta función, ya que en inglés es esta última la usada).
De esta manera se obtiene la gráfica siguiente:



Algunas de las características fundamentales de la función seno en el intervalo $[0,2\pi)$ son:

- La imagen de la función es el intervalo [–1,1].
- Los puntos de corte son (0,0) y $(\pi,0)$.
- Es creciente en $(0,\pi/2)$ y $(\pi,3\pi/2)$ y decreciente en $(\pi/2,\pi)$ y $(3\pi/2,2\pi)$.
- Tiene un máximo en el punto $(\pi/2,1)$ y un mínimo en el punto $(3\pi/2,-1)$.

Sabemos que para ángulos mayores que 2π sólo es necesario recurrir a la fórmula:

$$\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen } x$$

y para ángulos negativos:

$$\text{sen } (-\alpha) = -\text{sen } \alpha$$

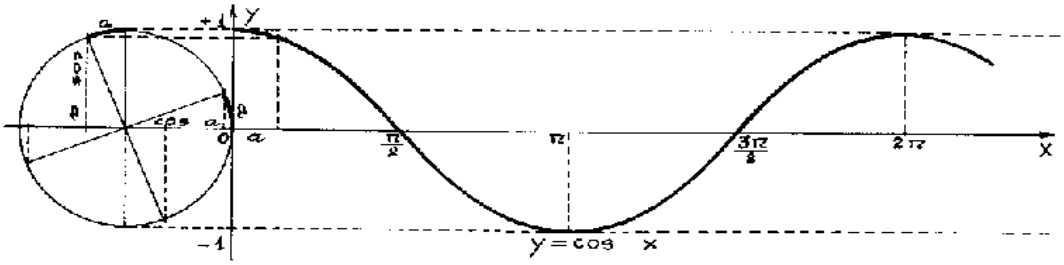
De esta manera, se puede extender la función seno a todo número real; la gráfica en un intervalo mayor sería como una onda y suele denominarse sinusoidal. Observamos que la gráfica repite los valores de la función cada 2π; es decir, es suficiente conocer los valores de la función en el intervalo $[0, 2\pi)$ para conocer los valores de la función en cualquier otro punto porque se trata de repetir la gráfica en ese intervalo. Por este motivo la función seno es una función periódica, de período 2π. Así pues, sus características globales son:

- La imagen de la función es el intervalo [–1,1] y el dominio son todos los reales.
- Los puntos de corte son ($k\pi$,0) donde k es cualquier número entero, y (0,1).
- decreciente: $((4k + 1)\pi/2,(4k + 3)\pi/2)$, creciente: $((4k + 3)\pi/2,(4k + 5)\pi/2)$, donde k es cualquier número entero
- Tiene un máximo en $((4k + 1)\pi/2,1)$ y un mínimo en $((4k + 3)\pi/2,–1)$, siendo k un número entero.

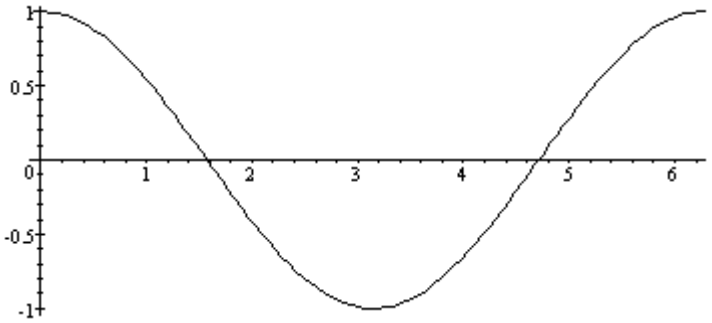
¿Qué es la función coseno y cuáles son sus características?

> La función coseno es otra de las funciones trigonométricas que a cada valor (en radianes) le hace corresponder su coseno. La función coseno es una función periódica, de período 2π. Su dominio son todos los números y su imagen es [–1,1].

La función coseno es aquella función que asocia a un ángulo en radianes su coseno; la gráfica de esta función se construye como sigue, cuando el ángulo se encuentra entre 0 y 2π, de manera semejante a como se construye la función seno:



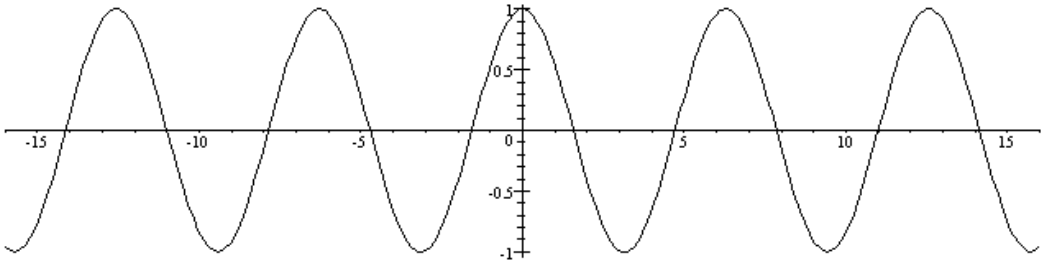
Así pues, la gráfica de la función coseno en el intervalo $[0,2\pi)$ es como sigue:



Algunas de las características fundamentales de la función coseno en el intervalo $[0,2\pi)$ son:

- La imagen de la función es el intervalo [–1,1].
- Los puntos de corte son (0,1), ($\pi/2$,0) y ($3\pi/2$,0).
- Es creciente en (π,2π) y decreciente en (0,π).
- Tiene un máximo en el punto (0,1) y un mínimo en el punto (π,–1).

Como la función seno, la función coseno es una función periódica porque repite esta misma forma cada 2π; de esta manera, la gráfica de la función coseno en un intervalo mayor presenta esta forma:
Algunas de las características fundamentales de la función coseno:

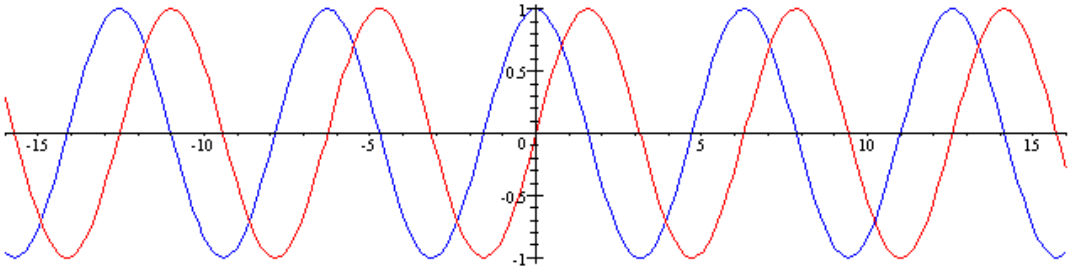


- La imagen de la función es el intervalo [–1,1] y el dominio son todos los reales.
- Los puntos de corte son $((2k + 1)\pi/2,0)$ donde k es cualquier número entero, y (0,1).
- Decreciente: $(2k\pi,(2k + 1)\pi)$, creciente:$((2k + 1)\pi,(2k + 2)\pi)$, donde k es cualquier número entero
- Tiene un máximo en $(2k\pi,1)$ y un mínimo en $((2k + 1)\pi,–1)$, siendo k un número entero.

¿Cuál es la relación entre la función seno y la función coseno?

> La forma de las funciones seno y coseno es la misma, aunque hay un desfase de $\pi/2$ entre una y otra. Esto es así porque es sabido que
> $\cos x = \text{sen}\,(x + \pi/2)$.

A primera vista, puede comprobarse que la función seno y la función coseno son muy semejantes. Si representamos ambas funciones en un mismo gráfico, esta semejanza es más patente:



Observamos que su forma es exactamente la misma, pero la función seno (en rojo) está ligeramente "adelantada" (en $\pi/2$) respecto a la función coseno (en azul). Esto es así porque, como es sabido:

$$\cos x = \text{sen}(x + \pi/2)$$

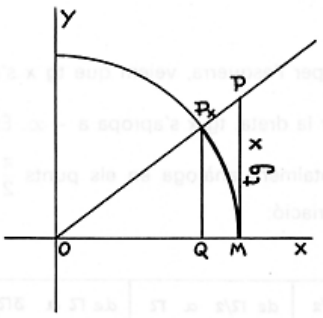
En esta tabla se muestra esta relación de manera más detallada, describiendo cada una de las funciones según el cuadrante:

x	0	de 0 a $\pi/2$ 1.er cuadrante	$\pi/2$	de $\pi/2$ a π 2.º cuadrante	π	de π a $3\pi/2$ 3.er cuadrante	$3\pi/2$	de $3\pi/2$ a 2π 4.º cuadrante	2π
sen x	0	positiva y creciente	1	positiva y decreciente	0	negativa y decreciente	–1	negativa y creciente	0
cos x	1	positiva y decreciente	0	negativa y decreciente	–1	negativa y creciente	0	positiva y creciente	1

¿Qué es la función tangente y cuáles son sus características?

> La función tangente es otra de las funciones trigonométricas que a cada valor (en radianes) le hace corresponder su tangente. La función tangente es una función periódica, de período π. Su dominio son todos los números excepto algunos puntos y su imagen son todos los números.

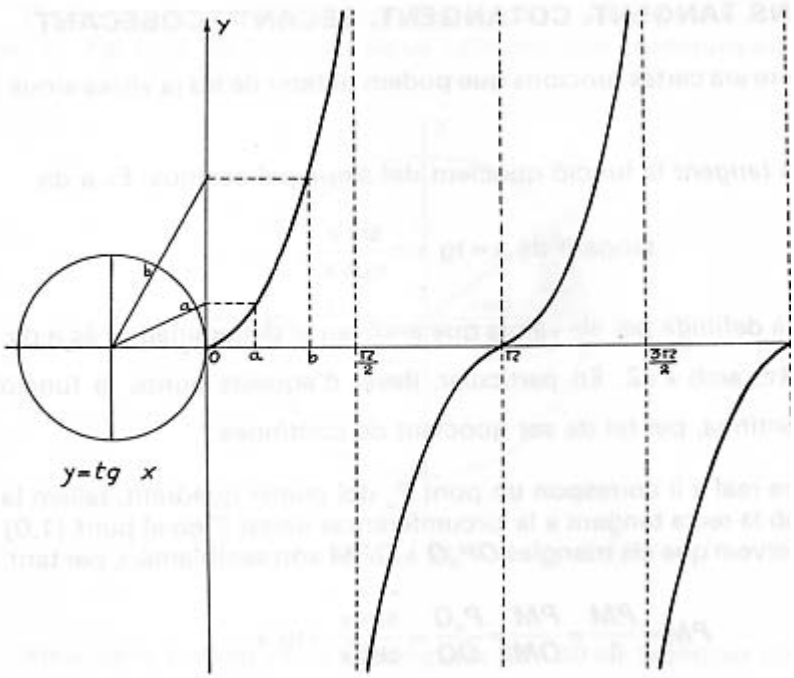
La función tangente es aquella función trigonométrica que asocia a un ángulo en radianes, su tangente. Para construirla, debe tenerse en cuenta que:



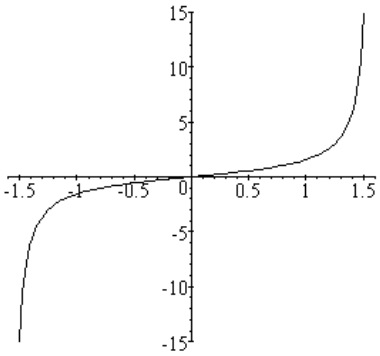
$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \text{(también } \tan x\text{)}$$

Para representar esta función, debe recurrirse a la interpretación geométrica de la tangente. En este gráfico puede observarse el primer cuadrante de una circunferencia de radio 1. El seno del ángulo representado es QP_x, el coseno es OQ y la tangente es MP. Por lo tanto, se puede representar la función tangente de la siguiente forma:

Así pues, si se representa la función tangente entre $-\pi/2$ y $\pi/2$,



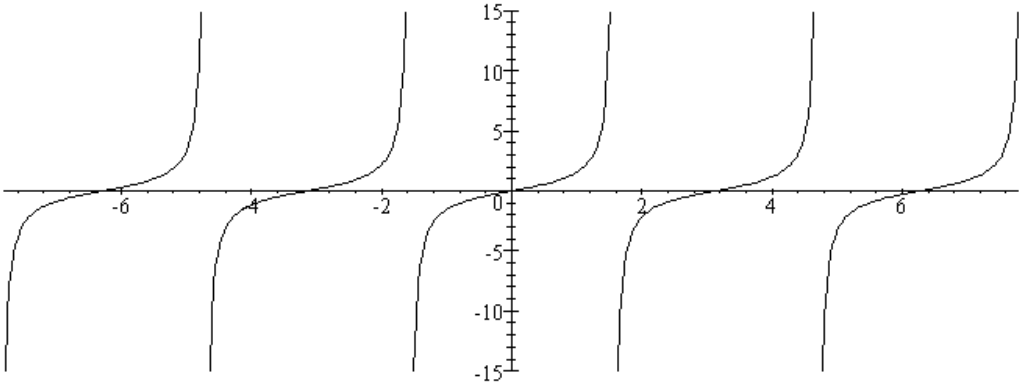
esta es su gráfica:



Algunas de las características fundamentales de la función tangente en el intervalo $[-\pi/2,\pi/2)$ son:

- La imagen de esta función se compone de todos los números reales, positivos o negativos.
- El único punto de corte es (0,0).
- Es una función creciente.
- No tiene ni máximos ni mínimos.

La función tangente, como las funciones seno y coseno, es una función periódica, en este caso de período π; así pues, si representamos su gráfica en un intervalo mayor, su representación será la siguiente:



Las propiedades de esta función son:

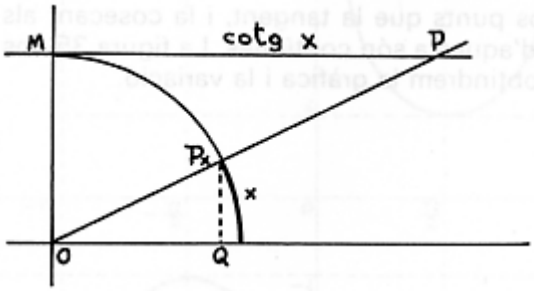
- A diferencia de la mayoría de las funciones estudiadas hasta el momento, el dominio de esta función no incluye todos los números: para los valores en los que el coseno es 0, la función no existe (porque se debería dividir entre 0, lo que es imposible); esto sucede cuando x es igual a $\pi/2 + k\pi$ (siendo k un número entero cualquiera), es decir, para ... $-7\pi/2$, $-5\pi/2$, $-3\pi/2$, $-\pi/2$, $\pi/2$, $3\pi/2$, $5\pi/2$, $7\pi/2$ ...
- La imagen de esta función son todos los números reales, positivos o negativos.
- La tangente es siempre una función creciente.
- Los puntos de corte con los ejes tienen coordenada x un múltiplo de π, es decir, los puntos de corte con los ejes son $(k\pi,0)$, donde k es un número entero.

¿Qué es la función cotangente y cuáles son sus características?

> La función cotangente es otra de las funciones trigonométricas que a cada valor (en radianes) le hace corresponder su cotangente. La función cotangente es una función periódica, de período π. Su dominio son todos los números excepto algunos puntos y su imagen son todos los números.

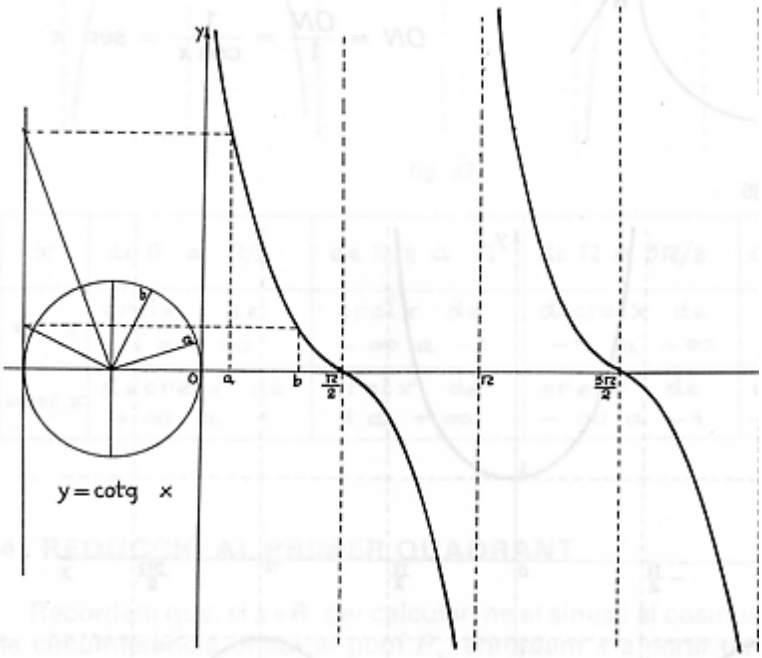
La función cotangente es aquella función trigonométrica que asocia a un ángulo en radianes, su cotangente. Para construirla, debe tenerse en cuenta que:

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

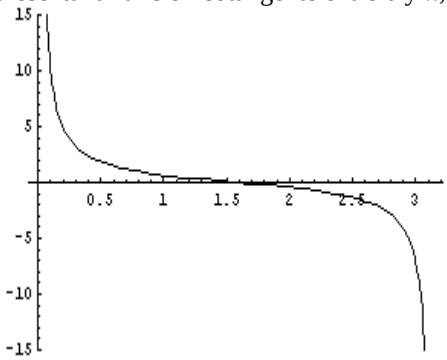


Para representar esta función, debe recurrirse a la interpretación geométrica de la cotangente. En este gráfico puede observarse el primer cuadrante de una circunferencia de radio 1. El seno del ángulo representado es QP_x, el coseno es OQ y la cotangente es MP.

Por lo tanto, se puede representar la función tangente de la siguiente forma:



Así pues, si se representa la función cotangente entre 0 y π, ésta es su gráfica:

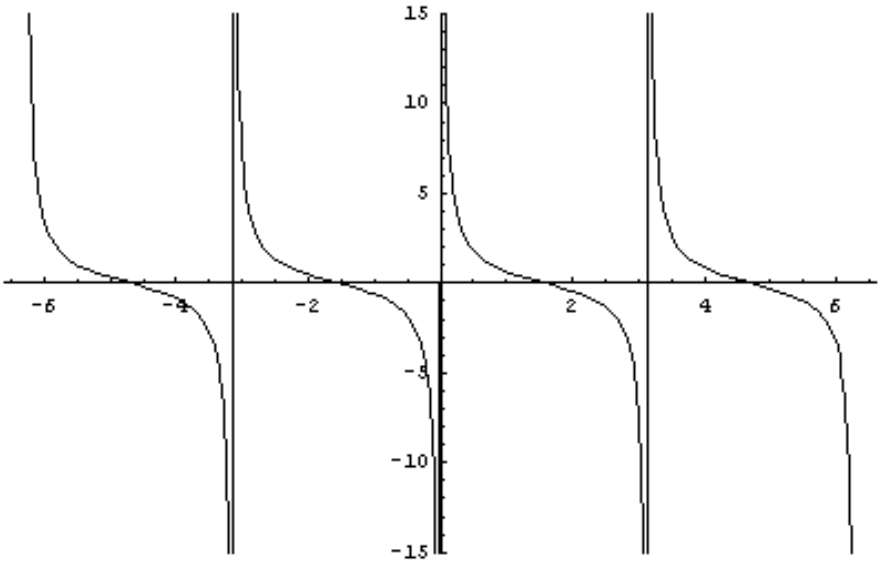


Algunas de las características fundamentales de la función cotangente en el intervalo [0,π) son:

- La imagen de esta función se compone de todos los números reales, positivos o negativos.
- El único punto de corte es (π/2,0).
- Es una función decreciente.
- No tiene ni máximos ni mínimos.

La función cotangente, como las funciones seno, coseno y tangente, es una función periódica, en este caso el período π; por tanto, si representamos su gráfica en un intervalo mayor, su representación será la siguiente:

Las



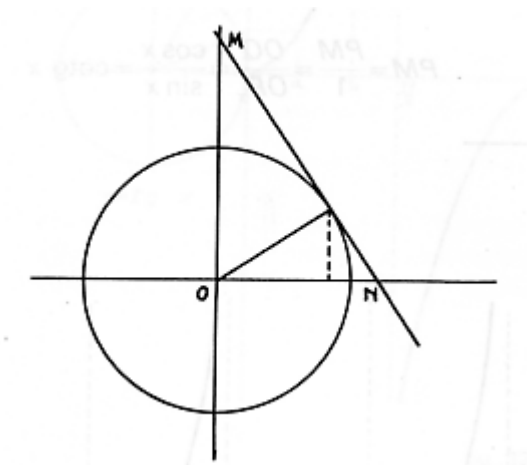
propiedades de esta función son:

- El dominio de esta función no incluye todos los números, como en el caso de la tangente: para los valores en los que el seno es 0, la función no existe (porque se debería dividir entre 0, lo que es imposible); esto sucede cuando x es igual a $k\pi$ (siendo k un número entero cualquiera), es decir, para ...-2π, $-\pi$, 0, $-\pi$, 2π...
- La imagen de esta función se compone de todos los números reales, positivos o negativos.
- La cotangente es siempre una función decreciente.
- Los puntos de corte con los ejes son ($\pi/2 + k\pi$, 0), donde k es un número entero.

¿Qué son las funciones secante y cosecante y cuáles son sus características?

De manera semejante a la función cotangente, las funciones secante y cosecante son las funciones que se calculan dividiendo 1 entre las funciones coseno y seno, respectivamente. También son funciones periódicas de período 2π.

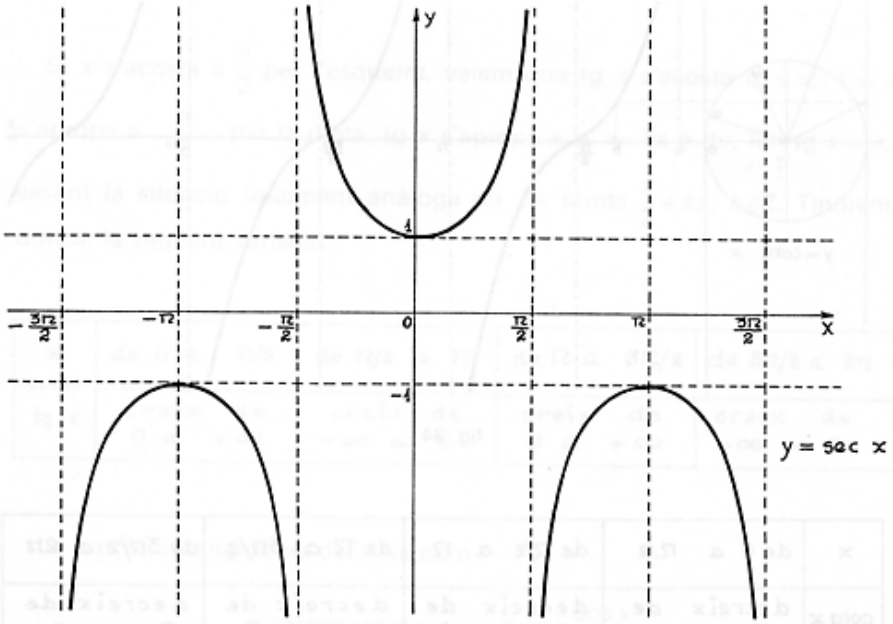
Las funciones secante y cosecante se definen de la siguiente manera:



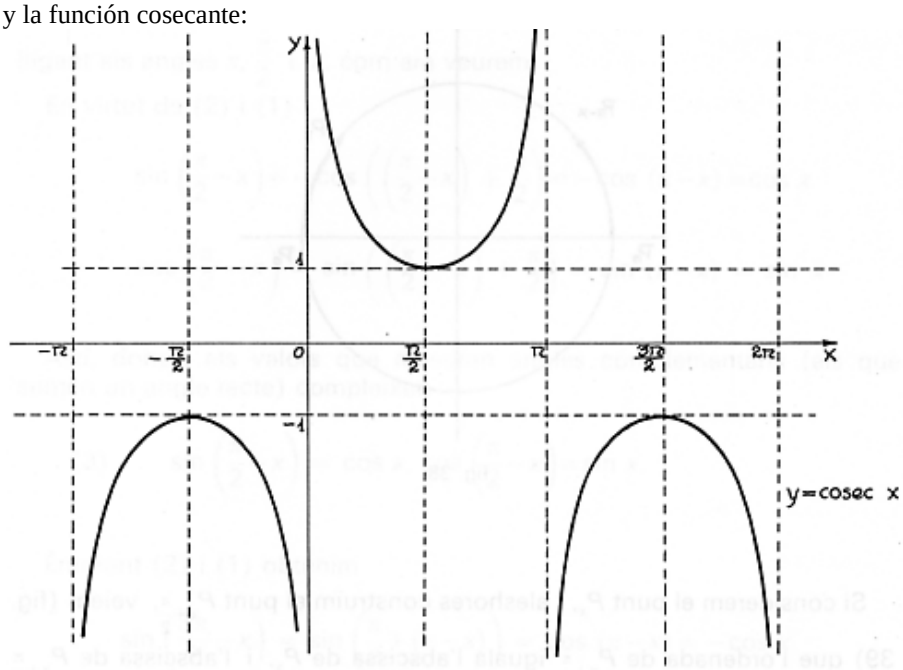
$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Para representar esta función, debe recurrirse a la interpretación geométrica: el segmento ON se corresponde con la secante y el segmento OM se corresponde con la cosecante.

Por lo tanto, se puede representar la función secante de la siguiente forma:



y la función cosecante:



Se trata, pues, de funciones periódicas de período 2π cuyas características esenciales son:

- Los dominios de estas funciones son:
    - la función secante: todos los números excepto $\pi/2 + k\pi$, siendo k un número entero;
    - la función cosecante: todos los números excepto $k\pi$, siendo k un número entero.
- La imagen de estas funciones se compone de todos los números reales, excepto el intervalo (–1,1).

- Los intervalos de crecimiento son (sin contar los puntos que no son del dominio):
    - secante:
      creciente: $(2k\pi,(2k + 1)\pi)$, decreciente: $((2k + 1)\pi,(2k + 2)\pi)$, donde k es cualquier número entero.
    - cosecante:
      creciente: $((4k+1)\pi/2,(4k+3)\pi/2)$, decreciente: $((4k+3)\pi/2,(4k+5)\pi/2)$, donde k es cualquier número entero.
- Máximos y mínimos:
    - secante:
      Tiene un mínimo en $(2k\pi,1)$ y un máximo en $((2k + 1)\pi,–1)$, siendo k un número entero.
    - cosecante:
      Tiene un mínimo en $((4k+1)\pi/2,1)$ y un máximo en $((4k+3)\pi/2,–1)$, siendo k un número entero.
- La secante tiene un único punto de corte, el (0,1), mientras que la tangente no tiene ninguno.

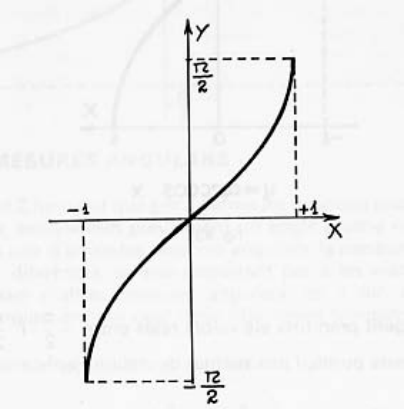
¿Cuáles son las funciones inversas de las funciones trigonométricas?

> Las funciones inversas de las funciones seno, coseno y tangente son las funciones arco seno, arco coseno y arco tangente. Las gráficas de dichas funciones son simétricas respecto a la recta $y = x$, tal como sucede con todas las funciones inversas.

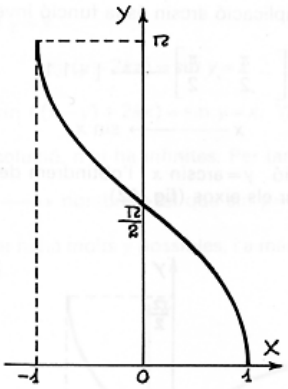
Todas las funciones trigonométricas tienen inversa en el intervalo de periodicidad propio de la función. En cualquier caso, las más importantes son las funciones inversas del seno, coseno y tangente. Para denominarlas, todas ellas preceden el nombre de la función original del término arco.

- La función inversa de la función seno se denomina arco seno y es una función que asigna a cada valor del intervalo [–1,1] el ángulo cuyo seno corresponde a dicho valor. Como existen muchos valores en los que sucede esto, solamente se utilizan los valores de los ángulos entre $[–\pi/2,\pi/2]$. Dicha función se designa con el símbolo arc sen. Por ejemplo, arc sen(0) = 0, ya que el ángulo que corresponde al valor del seno 0 es el ángulo 0 radianes.
- La función inversa de la función coseno se denomina arco coseno y es una función que asigna a cada valor del intervalo [–1,1] el ángulo cuyo coseno corresponde a dicho valor. Como existen muchos valores en los que sucede esto, solamente se utilizan los valores de los ángulos entre $[0,\pi]$. Dicha función se designa con el símbolo arc cos. Por ejemplo, arc cos(0) = $\pi/2$, ya que el ángulo que corresponde al valor del coseno 0 es el ángulo $\pi/2$ radianes.
- La función inversa de la función tangente se denomina arco tangente y es una función que asigna a cada valor real el ángulo cuya tangente corresponde a dicho valor. Como existen muchos valores en los que sucede esto, solamente se utilizan los valores de los ángulos entre $(–\pi/2,\pi/2)$. Dicha función se designa con el símbolo arc tan. Por ejemplo, arc tan(0) = 0, ya que el ángulo que corresponde al valor de la tangente 0 es el ángulo 0 radianes.

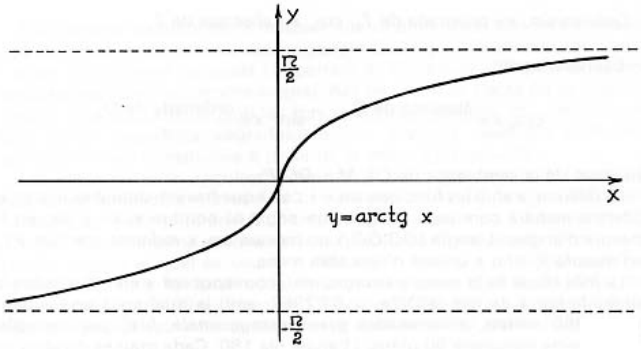
Éstas son las representaciones de dichas funciones, que, como sabemos, son funciones simétricas respecto a la recta $y = x$ de la función original:



$y = \arcsin x$



$y = \arccos x$



$y = \operatorname{arctg} x$

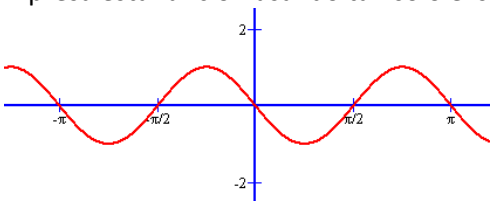
Ejercicios

1. ¿Cuáles son las características básicas de la función $f(x) = \cos(2x)$ (dominio, imagen, período, puntos de corte, crecimiento, máximos, mínimos, ...)?

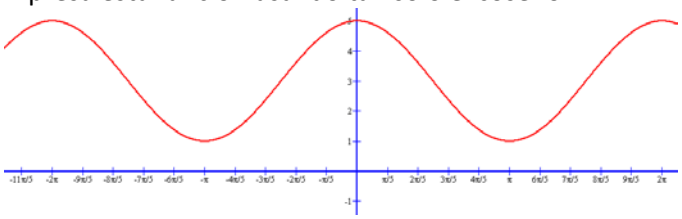
2. ¿Existe alguna solución de la ecuación $\sin x = \tan x$?

3. ¿Cuál es la imagen de las funciones $f(x) = 3\sin x$ y $g(x) = 3 + 2\cos x$.

4. Expresa esta función usando tan solo el seno:



5. Expresa esta función usando tan solo el coseno:



Soluciones

1. $f(x) = \cos(2x)$ es muy semejante a la función coseno, con la única diferencia que su argumento aumenta más rápidamente, por lo tanto, su gráfica será más "comprimida":
   - La imagen de la función es el intervalo [–1,1].
   - Su período es π .
   - Los puntos de corte son (0, 1), (π/4,0) i (3π/4,0).
   - Es creciente en (π/2,π) y decreciente en (0, π/2).
   - Tiene un máximo en el punto (0,1) y un mínimo en el punto (π/2,–1).

2. Tan solo hace falta resolver $\sin x = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, es decir,

   $1 = \dfrac{1}{\cos x}$, por lo tanto, $\cos x = 1$. Así $x = 0 + 2\pi k$.

3. $f(x) = 3\sin x$: la imagen es [-3,3], ya que los valores del seno se multiplican por 3.

   $g(x) = 3 + 2\cos x$: La imagen de $2\cos x$ es [-2,2], si debemos sumar 3, la imagen de la función será [1,5].

4. El período es π y el valor en 0 es 0 y a continuación es negativo. Por lo tanto, podría ser $f(x) = \sin(2x + \pi)$

5. La imagen es [1,5] i el valor en 0 es el máximo. El período es 2π . Por lo tanto, podría ser $f(x) = 2\cos x + 3$