Actividades resueltas

1 **El vector de posición de un móvil es: $\vec{r} = t^3\,\vec{i} + 4\,t^2\,\vec{j}$ m, donde *t* se mide en segundos. Calcula:**

a. **La velocidad media en los 5 primeros segundos y la velocidad que tendrá en ese instante.**

b. **La aceleración media en los 5 primeros segundos y la aceleración que tendrá en ese instante.**

a. Para calcular la velocidad media:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}_5 - \vec{r}_0}{t_5 - t_0}$$

$$\vec{v}_m = \frac{5^3\,\vec{i} + 4 \cdot 5^2\,\vec{j}}{5} = 25\,\vec{i} + 20\,\vec{j} \text{ m/s}$$

La velocidad instantánea es:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 3\,t^2\,\vec{i} + 8\,t\,\vec{j} \text{ m/s}$$

Por tanto, para $t = 5$ s:

$$\vec{v} = 3 \cdot 5^2\,\vec{i} + 8 \cdot 5\,\vec{j} = 75\,\vec{i} + 40\,\vec{j} \text{ m/s}$$

El módulo de $\vec{v}$ es:

$$|\vec{v}| = \sqrt{75^2 + 40^2} = 85 \text{ m/s}$$

b. La aceleración media es:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_5 - \vec{v}_0}{t_5 - t_0}$$

$$\vec{a}_m = \frac{75\,\vec{i} + 40\,\vec{j}}{5} = 15\,\vec{i} + 8\,\vec{j} \text{ m/s}^2$$

La aceleración instantánea es:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 6\,t\,\vec{i} + 8\,\vec{j} \text{ m/s}^2$$

Para $t = 5$ s:

$$\vec{a}_5 = \frac{d\vec{v}}{dt} = 6 \cdot 5\,\vec{i} + 8\,\vec{j} = 30\,\vec{i} + 8\,\vec{j} \text{ m/s}^2$$

El módulo de $\vec{a}$ es:

$$|\vec{a}| = \sqrt{30^2 + 8^2} = 31{,}05 \text{ m/s}^2$$

2 **Halla el valor de la aceleración con la que se mueve un objeto que, partiendo del reposo, es capaz de recorrer en línea recta una distancia de 130 m en 5 s, suponiendo que la aceleración sea uniforme.**

Como la aceleración del movimiento es constante, se puede aplicar alguna de las expresiones del MRUA:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

El objeto parte del reposo y se supone que para $t = 0$, $x = 0$.

$$a = \frac{2x}{t^2} \Rightarrow a = \frac{2 \cdot 130 \text{ m}}{(5 \text{ s})^2} = 10{,}4 \text{ m/s}^2$$

3 **Un móvil parte del reposo hasta alcanzar en 5 s una velocidad de 30 m/s, se mantiene con MRU durante 10 s y posteriormente se detiene en un tiempo de 3 s.**

a. **Halla los valores de las aceleraciones y el espacio recorrido desde que el móvil inicia el movimiento hasta que se detiene.**

b. **Realiza una representación gráfica $v(t)$.**

a. El ejercicio se resuelve por tramos y posteriormente se suman los resultados de cada tramo.

Tramo 1: MRUA

$$v = v_0 + at \Rightarrow a = \frac{v - v_0}{t}$$

Se sustituyen los datos en la ecuación:

$$a = \frac{30 \text{ m/s} - 0}{5 \text{ s}} = 6 \text{ m/s}^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2\,ax \Rightarrow x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

Se sustituyen los datos en la ecuación:

$$x = \frac{(30 \text{ m/s})^2 - 0}{2 \cdot 6 \text{ m/s}^2} = 75 \text{ m}$$

Tramo 2: MRU

La velocidad es constante, luego el espacio recorrido es:

$$x = vt \quad \Rightarrow \quad x = 30 \text{ m/s} \cdot 10 \text{ s} = 300 \text{ m}$$

Tramo 3: MRUA

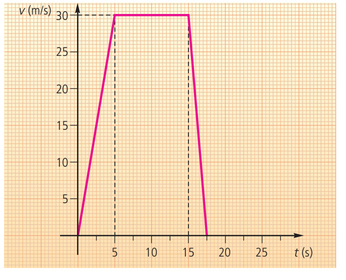
$$v = v_0 + at \Rightarrow a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0 - 30 \text{ m/s}}{3 \text{ s}} = -10 \text{ m/s}^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax \Rightarrow x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{0 - (30 \text{ m/s})^2}{2 \cdot (-10 \text{ m/s}^2)} = 45 \text{ m}$$

El espacio recorrido desde que el móvil inicia el movimiento hasta que se detiene es:

$$x_t = x_1 + x_2 + x_3 = 75 \text{ m} + 300 \text{ m} + 45 \text{ m} = 420 \text{ m}$$

b. La representación gráfica del movimiento tendrá la forma:



4 **Desde un punto situado a 130 m de altura se lanza verticalmente hacia arriba un cuerpo con una velocidad de 30 m/s; 3 s más tarde se lanza otro cuerpo desde el suelo a 200 m/s. Calcula:**

a. **La altura máxima que alcanza cada cuerpo.**

b. **El tiempo que tarda el segundo cuerpo en alcanzar al primero.**

c. **La altura a la que lo alcanza.**

d. **La velocidad que tienen ambos cuerpos en el momento del alcance.**

a. Ambos movimientos son MRUA, cuyo valor de la aceleración es:

$$g = -9{,}8 \text{ m/s}^2$$

Para calcular las alturas se utiliza la expresión:

$$v^2 = v_0^2 + 2\,gh$$

En el caso del primer móvil:

$$h = \frac{v^2 - v_0^2}{2g} = \frac{0 - (30 \text{ m/s})^2}{2 \cdot (-9{,}8 \text{ m/s}^2)}$$

$$h = 45{,}92 \text{ m}$$

Luego este primer móvil alcanzará una altura respecto al suelo:

$$h_1 = 45{,}92 \text{ m} + 130 \text{ m} = 175{,}92 \text{ m}$$

En el caso del segundo móvil, la altura que alcanzará no hay que compensarla como se ha hecho con el primero:

$$h = \frac{v^2 - v_0^2}{2g} = \frac{0 - (200 \text{ m/s})^2}{2 \cdot (-9{,}8 \text{ m/s}^2)}$$

$$h = 2\,040{,}82 \text{ m}$$

b. Para determinar los valores que caracterizan el momento del alcance hay que tener en cuenta que:

- Los tiempos de uno y otro cuerpo tienen un retraso o un adelanto y, por tanto, están relacionados de la siguiente manera:

$$t_2 = t_1 - 3 \text{ s}$$

- La altura de la que parte el primer cuerpo es:

$$h_{01} = 130 \text{ m}$$

- Las velocidades de los móviles son:

$$v_{01} = 30 \text{ m/s}$$

$$v_{02} = 200 \text{ m/s}$$

c. Para cada móvil, se puede escribir:

$$h_1 = h_{01} + v_{01}t_1 + \frac{1}{2}gt_1^2 = 130 + 30\,t_1 + \frac{1}{2} \cdot (-9{,}8)t_1^2$$

$$h_2 = v_{02}t_2 + \frac{1}{2}gt_2^2 = 200 \text{ m/s}\;t_2 + \frac{1}{2} \cdot (-9{,}8) \text{ m/s}^2 \cdot t_2^2$$

Se sustituye en esta última expresión:

$$t_2 = t_1 - 3 \text{ s}$$

Se obtiene:

$$h_2 = 200 \text{ m/s} \cdot (t_1 - 3) + \frac{1}{2} \cdot (-9{,}8) \text{ m/s}^2 \cdot (t_1 - 3)^2$$

Y como:

$$h_1 = 130 \text{ m} + 30 \text{ m/s} \cdot t_1 + \frac{1}{2} \cdot (-9{,}8) \text{ m/s}^2 \cdot t_1^2$$

Se igualan las dos alturas:

$$130 \text{ m} + 30 \text{ m/s} \cdot t_1 + \frac{1}{2} \cdot (-9{,}8) \text{ m/s}^2 \cdot t_1^2 =$$

$$= 200 \text{ m/s} \cdot (t_1 - 3) + \frac{1}{2} \cdot (-9{,}8) \text{ m/s}^2 \cdot (t_1 - 3)^2$$

Se resuelven las ecuaciones:

$$30\,t_1 + \frac{1}{2}(-9{,}8) \cdot t_1^2 + 130 =$$

$$= 200 \cdot t_1 - 600 + \frac{1}{2} \cdot (-9{,}8) \cdot t_1^2 + \frac{1}{2} \cdot 58{,}8\,t_1 - \frac{1}{2} \cdot 88{,}2$$

$$t_1 = 3{,}88 \text{ s}$$

Por tanto: $t_2 = t_1 - 3 \text{ s} = 3{,}88 \text{ s} - 3 \text{ s} = 0{,}88 \text{ s}$

Se sustituyen los valores en h_1:

$$h_1 = 130 \text{ m} + 30 \text{ m/s}\;t_1 + \frac{1}{2} \cdot (-9{,}8) \text{ m/s}^2 \cdot t_1^2$$

$$h_1 = 130 \text{ m} + 30 \text{ m/s} \cdot 3{,}88 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot (-9{,}8 \text{ m/s}^2) \cdot (3{,}88 \text{ s})^2$$

$$h_1 = 172{,}63 \text{ m}$$

d. $v_1 = v_{01} + gt_1 = 30 \text{ m/s} - 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 3{,}88 \text{ s}$

$$v_1 = -8{,}02 \text{ m/s (está bajando)}$$

$$v_2 = v_{02} + gt_2 = 200 \text{ m/s} - 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 0{,}88 \text{ s} = 191{,}4 \text{ m/s}$$

5 **Una corredora realiza un circuito en el que hay tramos de subidas y bajadas de igual longitud. En los tramos de subida va a 6 km/h y en los de bajada alcanzan una velocidad de 15 km/h. ¿Cuál ha sido la velocidad media del recorrido realizado?**

El trayecto de subida y el de bajada son iguales, es decir, *r*. El camino que recorre la corredora será, entre una subida y una bajada: 2*r*. El tiempo empleado en ese recorrido será la suma del que invierte en subir más el que invierte en bajar. El tiempo de subida será:

$$t_{subir} = \frac{r}{v_{subir}} = \frac{r}{6} \text{ h}\;;\; t_{bajar} = \frac{r}{v_{bajar}} = \frac{r}{15} \text{ h}$$

$$t_{total} = t_{subir} + t_{bajar} = \frac{7r}{30} \text{ h} \cdot 3600 \frac{\text{s}}{\text{h}} = 840r \text{ s}$$

La velocidad media será:

$$v = \frac{\text{tramo de subida} + \text{tramo de bajada}}{t_{total}}$$

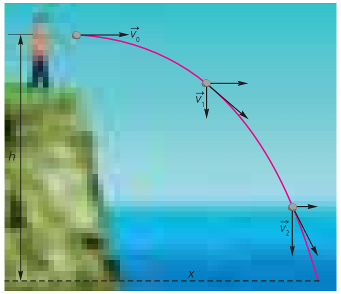
$$v = \frac{2r \text{ km} \cdot 10^3 \text{ m/km}}{840r \text{ s}} = 2{,}38 \text{ m/s}$$

6 Desde un acantilado de 50 m de altura se lanza un cuerpo horizontalmente con una velocidad de 20 m/s. Calcula:

a. El tiempo que tarda en llegar a la superficie del agua.

b. El alcance máximo.

c. La velocidad que tiene cuando llega al agua.



a. Del enunciado, sabemos que $v_{0y} = 0$ m/s y $v_{0x} = 20$ m/s

$a = g = 9{,}8$ m/s^2; $h = 50$ m

El movimiento vertical es un MRUA.

Para calcular el tiempo que el cuerpo tarda en llegar al agua:

$$h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

Se sustituyen los datos en la ecuación:

$$50 \text{ m} = 0 + \frac{1}{2}\, 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot t^2$$

Se despeja t:

$$t = 3{,}19 \text{ s}$$

b. El alcance es un movimiento horizontal; por tanto, en este caso se trata de un MRU:

$$x = vt$$

Se sustituyen los datos en la ecuación:

$$x = 20 \text{ m/s} \cdot 3{,}19 \text{ s} = 63{,}8 \text{ m}$$

c. La componente horizontal es la misma que tenía al principio, 20 m/s.

La velocidad vertical es:

$$v = v_0 + at = 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 3{,}19 \text{ s} = 31{,}26 \text{ m/s}$$

El módulo de la velocidad es:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Se sustituyen los datos en la ecuación:

$$|\vec{v}| = \sqrt{20^2 + 31{,}26^2} \text{ m/s} = 37{,}11 \text{ m/s}$$

7 Una ambulancia que circula por una carretera rectilínea con una velocidad constante de 120 km/h solicita escolta policial por radio. Si el coche de policía está detenido en el arcén y se pone en movimiento justo cuando la ambulancia pasa por delante con una aceleración constante de 5 m/s^2, calcula:

a. ¿Cuándo y dónde se produce el alcance?

b. ¿Qué velocidad lleva en ese instante la policía?

c. ¿Cuánto tiempo estará expuesto el coche de policía al alcance de un radar de control de velocidad si el límite de velocidad es de 120 km/h?

a. Para resolver este problema se han de tener en cuenta algunas consideraciones principales:

- El movimiento de la ambulancia es un MRU.
- El movimiento del coche de policía es un MRUA.
- Los tiempos y las distancias de ambos móviles en el momento del alcance son idénticos.

Para la ambulancia:

$$120 \text{ km/h} = 120 \text{ km/h} \cdot \frac{1000}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 33{,}33 \text{ m/s}$$

El alcance es:

$$x = v_0 t = 33{,}33 \text{ m/s} \cdot t$$

Para el coche de policía:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Se sustituyen los datos en la ecuación:

$$x = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 5 \text{ m/s}^2 \cdot t^2$$

Como ya se ha indicado, los espacios y los tiempos son iguales; por tanto:

$$33{,}33 \text{ m/s} \cdot t = \frac{1}{2} \cdot 5 \text{ m/s}^2 \cdot t^2 \Rightarrow t = 13{,}33 \text{ s}$$

$$x = v_0 t = 33{,}33 \text{ m/s} \cdot 13{,}33 \text{ s} = 444{,}29 \text{ m}$$

b. Para calcular la velocidad:

$$v = v_0 + at$$

$$v = 0 + 5 \text{ m/s}^2 \cdot 13{,}33 \text{ s} = 66{,}65 \text{ m/s}$$

c. El tiempo que tarda el coche de policía en alcanzar dicha velocidad es:

$$v = v_0 + at$$

Despejando t:

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{33{,}33 \text{ m/s} - 0}{5 \text{ m/s}^2} = 6{,}67 \text{ s}$$

Por tanto, el coche de policía estará expuesto a la acción del radar durante un tiempo de:

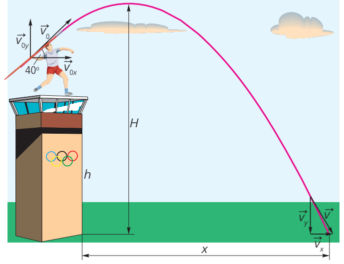
$$t = 13{,}66 \text{ s} - 6{,}67 \text{ s} = 6{,}66 \text{ s}$$

8 Desde la torre de retransmisiones de un campo de atletismo, de 30 m de altura, se lanza una jabalina con una velocidad de 15 m/s y con una inclinación con respecto a la horizontal de 40°. Calcula el tiempo de vuelo, el alcance horizontal, la altura máxima, la velocidad con la que llega al suelo y el ángulo con el que se clava en el césped.

Descomponemos la velocidad inicial según los ejes de coordenadas; se toma como origen del sistema de referencia el punto de lanzamiento (observa la gráfica):

$$\vec{v}_{0x} = v_0 \cdot \cos 40° \,\vec{i} = 15 \cdot \cos 40° \,\vec{i} = 11{,}49 \,\vec{i} \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_{0y} = v_0 \cdot \text{sen} 40° \,\vec{j} = 15 \cdot \text{sen} 40° \,\vec{j} = 9{,}64 \,\vec{j} \text{ m/s}$$



Descomponemos los movimientos en tres fases:

- **Fase 1** (ascenso):

La velocidad inicial es v_{0y} y la final es cero.

La aceleración es $-g$.

$$v = v_0 + g t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v - v_0}{g} = \frac{0 - 9{,}64 \text{ m/s}}{-9{,}8 \text{ m/s}^2} = 0{,}98 \text{ s}$$

$$v^2 - v_{0y}^2 = 2\,gh$$

$$h = \frac{v^2 - v_{0y}^2}{2g} = \frac{0^2 - 9{,}64^2 \text{(m/s)}^2}{2 \cdot (-9{,}8) \text{ m/s}^2} = 4{,}74 \text{ m}$$

Hay que sumar a $h = 4{,}74$ m la altura de la torre. La altura máxima alcanzada será:

$$h = 30 \text{ m} + 4{,}74 \text{ m} = 34{,}74 \text{ m}$$

El tiempo que tardará en llegar a la altura máxima, 34,74 m, será:

$$y = y_0 + v_0 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4{,}74 \text{ m/s}}{9{,}8 \text{ m/s}^2}} = 0{,}98 \text{ s}$$

- **Fase 2** (descenso):

$$v_0 = 0 \;\; \text{y} \;\; a = +g$$

Ahora se calcula el tiempo que tarda en bajar desde $h_0 = 34{,}74$ m:

$$h = h_0 + v_0 t_2 + \frac{1}{2} a t_2^2$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 34{,}74 \text{ m}}{9{,}8 \text{ m/s}^2}} = 2{,}66 \text{ s}$$

El tiempo total de vuelo será:

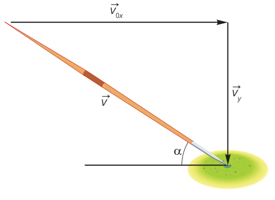
$$t_1 + t_2 = 0{,}98 \text{ s} + 2{,}66 \text{ s} = 3{,}64 \text{ s}$$

Y la velocidad con la que llega al suelo según el eje Y será:

$$\vec{v}_y = (v_{0y} + g t_2)(-\vec{j})$$

$$\vec{v}_y = (0 + 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 2{,}66 \text{ s})(-\vec{j}) = -26{,}07 \,\vec{j} \text{ m/s}$$

Con estos resultados podemos obtener la velocidad con la que llega al suelo y el ángulo con el que se clava la jabalina (observa el dibujo):



$$\vec{v} = \vec{v}_{0x} + \vec{v}_y = (11{,}49 \,\vec{i} - 26{,}07 \,\vec{j}) \text{ m/s}$$

El módulo de la velocidad será:

$$|\vec{v}| = \sqrt{11{,}49^2 \text{ (m/s)}^2 + 26{,}07^2 \text{ (m/s)}^2}$$

$$|\vec{v}| = 28{,}49 \text{ m/s}$$

El ángulo de inclinación será:

$$\alpha = \text{arctg} \frac{26{,}07}{11{,}49} = 66{,}22°$$

- **Fase 3** (desplazamiento horizontal):

Como $v_{0x} =$ cte, el alcance será:

$$x = v_{0x} t = 11{,}49 \text{ m/s} \cdot 3{,}64 \text{ s} = 41{,}82 \text{ m}$$

9 Una noria de feria tarda 30 s en alcanzar su velocidad crucero, que es de una vuelta por minuto. Calcula:

a. La aceleración de la noria.

b. La cantidad de vueltas que da en 5 min.

c. La velocidad lineal de un punto de la periferia si la noria tiene un radio de 25 m.

a. El movimiento que describe la noria es una composición de un MCUA durante 30 s y un MCU para el resto del tiempo.

La velocidad crucero se ha de expresar en unidades del SI, en rad/s:

$$\omega = \frac{1\ \text{vuelta}}{\text{min}} = \frac{2\pi}{60}\frac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{\pi}{30}\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

La aceleración de la noria será entonces:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow \alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{\frac{\pi}{30}\ \text{rad/s} - 0}{30\ \text{s}}$$

$$\alpha = 3{,}49 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

b. El número de vueltas es la suma de las que da en los primeros 30 s y las que da en los 4,5 min restantes hasta completar los 5 min.

En los primeros 30 s:

$$\theta_1 = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\theta_1 = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 3{,}49 \cdot 10^{-3}\ \text{rad/s}^2 \cdot 30^2\ \text{s}^2$$

Durante los 4 min 30 s restantes:

$$\omega = \frac{\theta_2}{t} \Rightarrow \theta_2 = \omega t = \frac{\pi}{30} \cdot (4{,}5\ \text{min} \cdot 60\ \text{s/min}) = 28{,}27\ \text{rad}$$

Las vueltas totales serán:

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = 1{,}57\ \text{rad} + 28{,}27\ \text{rad} = 29{,}84\ \text{rad}$$

$$\text{N.º vueltas} = 29{,}84\ \text{rad} \cdot \frac{1\ \text{vuelta}}{2\pi\ \text{rad}} = 4{,}75\ \text{vueltas}$$

c. La velocidad viene dada por:

$$v = \omega r$$

$$v = \frac{\pi}{30} \cdot 25 = 2{,}62\ \text{m/s}$$

10 Un cuerpo realiza un MAS de acuerdo con la ecuación:

$$x = 4\ \text{sen}\left(6\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

donde todo está expresado en el SI.

a. Calcula la amplitud, la frecuencia y el periodo del movimiento.

b. Escribe las ecuaciones de la velocidad y la aceleración del movimiento.

c. Halla la elongación, la velocidad y la aceleración en el instante $t = 2{,}12$ s.

a. Si comparamos la ecuación dada con la ecuación de la elongación del MAS, obtenemos de forma directa el valor de la amplitud:

$$A = 4\ \text{m}$$

Vemos que:

$$\omega = 6\pi\ \text{rad/s}$$

Y a su vez:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

La frecuencia será:

$$f = \frac{6\pi}{2\pi} = 3\ \text{s}^{-1}$$

El periodo será:

$$T = \frac{1}{f} = 0{,}33\ \text{s}$$

b. La ecuación de la velocidad será:

$$v = 24\pi \cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Y la de la aceleración:

$$a = -144\pi^2\ \text{sen}\left(6\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

c. Los valores de x, v y a en $t = 2{,}12$ s se obtienen mediante la simple sustitución en las ecuaciones correspondientes (no olvides poner la calculadora en **modo RAD**).

Así, la ecuación de posición es:

$$x(t = 2{,}12\ \text{s}) = 4\ \text{sen}\left(6\pi \cdot 2{,}12 + \frac{\pi}{2}\right) = -2{,}55\ \text{m}$$

La de la velocidad vendrá dada por:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$v(t = 2{,}12\ \text{s}) = 24\pi \cos\left(6\pi \cdot 2{,}12 + \frac{\pi}{2}\right) = -58{,}1\ \text{m/s}$$

La de la aceleración vendrá dada por:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$a(t = 2{,}12\ \text{s}) = -144\pi^2\ \text{sen}\left(6\pi \cdot 2{,}12 + \frac{\pi}{2}\right) = -905{,}92\ \text{m/s}^2$$

11 Un cuerpo que se mueve con MAS se encuentra en el instante inicial a 10 cm de la posición de equilibrio y su velocidad es nula. Si el periodo del movimiento es de 15 s, escribe las ecuaciones de la elongación, de la velocidad y de la aceleración.

Parece claro que el cuerpo se encuentra en $x = A$ o en $x = -A$, pues el ejercicio nos dice que la velocidad es nula en ese punto. No obstante, si no caemos en ese detalle, siempre podemos recurrir a las expresiones matemáticas, de manera que:

$$v(t = 0) = 0 = A \cos(\omega t + \theta)$$

Para que se cumpla esta igualdad:

$$\cos(\omega \cdot 0 + \theta) = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}\ \text{rad}$$

Una vez obtenido el desfase, recurrimos a la ecuación de la elongación para calcular la amplitud, pues el enunciado nos dice que $x(t = 0) = 10$ cm:

$$x(t = 0) = 10\ \text{cm} = A\ \text{sen}\left(\omega \cdot 0 + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow A = 10\ \text{cm}$$

Como $T = 15$ s, la frecuencia angular será:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Se sustituye el valor del periodo:

$$\omega = \frac{2\pi}{15}\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Con lo que las ecuaciones buscadas, ya expresadas en el SI, son, para la ecuación de la posición:

$$x = 0{,}1\ \text{sen}\left(\frac{2\pi}{15}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

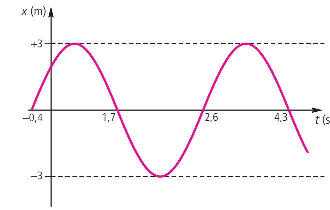
La de la velocidad será:

$$v = 0{,}042 \cos\left(\frac{2\pi}{15}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

La de la aceleración será:

$$a = -0{,}018\ \text{sen}\left(\frac{2\pi}{15}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

12 Dada la siguiente gráfica:



a. Deduce los valores de amplitud, periodo, frecuencia, pulsación y desfase.

b. Escribe la ecuación del movimiento.

c. Escribe las ecuaciones de la velocidad y de la aceleración.

d. Calcula la posición que tiene un punto cuando su aceleración es de 5,3 m · s^{-2}.

a. Sabemos que el periodo es el intervalo de tiempo entre dos puntos consecutivos en el mismo estado, por lo que:

$$T = 4{,}1\ \text{s} - 1{,}1\ \text{s} = 2{,}6\ \text{s} - (-0{,}4)\ \text{s} = 3\ \text{s}$$

De esta manera:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{3\ \text{s}} = 0{,}33\ \text{s}^{-1}$$

$$\omega = 2\pi f = 2{,}09\ \text{rad s}^{-1}$$

La amplitud es: $A = 3$ m

b. Podemos escribir la ecuación del movimiento como sigue:

$$x = A\ \text{sen}(\omega t + \theta) = 3\ \text{sen}(2{,}09t + \theta)$$

Para determinar el desfase basta con ver la gráfica y escoger algún punto del que conozcamos todo:

$$x(t = 1{,}1\ \text{s}) = 0 \Rightarrow \text{sen}(2{,}09\ \text{rad/s} \cdot 1{,}1\ \text{s} + \theta) = \pi$$

El valor del ángulo es:

$$\theta = 0{,}84\ \text{rad}$$

Luego $x = 3\ \text{sen}(2{,}09t + 0{,}84)$

(Para obtener el valor de θ se ha igualado a π, en lugar de a cero, porque, según el estudio de la función seno, la función pasa de un valor positivo a uno negativo. Si hubiéramos elegido $t = 2{,}6$ s, por ejemplo, habría que haber igualado a cero. Recuerda que estamos utilizando argumentos en radianes.)

c. Las ecuaciones de la velocidad y de la aceleración serán:

$$v = A\omega \cos(\omega t + \theta) = 6{,}27 \cos(2{,}09t + 0{,}84)$$

$$a = -A\omega^2\ \text{sen}(\omega t + \theta) = -13{,}1\ \text{sen}(2{,}09t + 0{,}84)$$

d. Por último, sabemos que en función de la posición:

$$a = -\omega^2 x \Rightarrow x = \frac{-a}{\omega^2} = \frac{-5{,}3\ \text{rad/s}^2}{2{,}09^2\ (\text{rad/s})^2} = -1{,}21\ \text{m}$$