EXAMEN DE CÁLCULO DIFERENCIAL

1. Halla: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arctgx - x}{x - arcsenx}$

2. Representa una función par (simétrica respecto del eje y) que cumpla:
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = -1$$
$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = 3$$

3. Halla la expresión de la función recíproca de $f(x) = \dfrac{3-4x}{2x+1}$. Estudia también el dominio y el recorrido de ambas funciones.

4. Deriva logarítmicamente simplificando la expresión final lo más posible: $y = \dfrac{(4-x^2)\sqrt[3]{x+2}}{x-2}$

5. Razona si la siguiente frase es verdadera o falsa poniendo un ejemplo si fuese necesario:

   Que la derivada de una función *f*(*x*) en *x* = 2 sea 5, implica que **necesariamente** la función sea continua en el punto (2, 5)

6. Halla el punto de la curva $y = 6\ln x - 2x$ en el que la recta tangente forma un ángulo de 135º con respecto al eje X

(Contesta 3 de las siguientes preguntas. Cada una puntuará 2 puntos sobre el total de 10 del examen)

7. Halla el punto de la parábola $y = x^2 + x$ más cercano al punto P(7, 5)

8. Estudia gráficamente $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$

9. Halla los puntos de inflexión de la función: $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

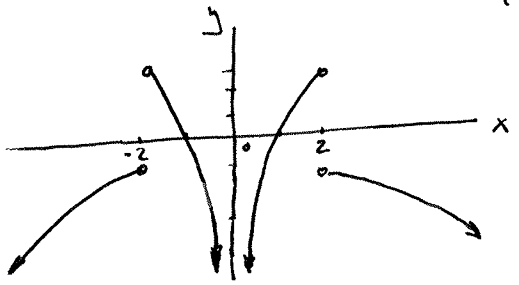
10. Sea la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$

    a) Determine razonadamente el valor del parámetro k para que la función *f*(*x*) sea continua para todos los números reales

    b) Estudie si esta función es derivable en *x* = 0 y en caso afirmativo halle $f'(x)$

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x - x}{x-\operatorname{arcsen}x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cancel{-2x}}{(1+x^2)^2}}{-\frac{\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot\cancel{(-2x)}}{1-x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x^2)^2}}{\frac{-1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x\to 0}\frac{-(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}{(1+x^2)^2} = \frac{-1}{1} = \boxed{-1}$$

2. 

3. $y=\frac{3-4x}{2x+1}$

$x=\frac{3-4y}{2y+1}$; $2xy+x=3-4y$; $2xy+4y=3-x$; $y=\frac{3-x}{2x+4}$

$f(x)=\frac{3-4x}{2x+1} \to \operatorname{dom} f = \mathbb{R}-\{-1/2\}$ $\quad \operatorname{im} f = \mathbb{R}-\{-2\}$

$f^{-1}(x)=\frac{3-x}{2x+4} \to \operatorname{dom} f^{-1} = \mathbb{R}-\{-2\}$ $\quad \operatorname{im} f^{-1} = \mathbb{R}-\{-1/2\}$

4. $y=\frac{(4-x^2)\sqrt[3]{x+2}}{x-2}$; $\ln y = \ln(4-x^2)+\frac{1}{3}\ln(x+2)-\ln(x-2)$

$$\frac{y'}{y} = \frac{-2x}{4-x^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2} = \frac{2x}{x^2-4}+\frac{1}{3(x+2)}-\frac{1}{x-2} =$$

$$= \frac{6x+x-2-3(x+2)}{3(x^2-4)} = \frac{4x-8}{3(x^2-4)} = \frac{4(x-2)}{3(x^2-4)}$$

$$y' = \frac{4(x-2)}{3(x^2-4)}\cdot y = \frac{4\cancel{(x-2)}}{3(x^2-4)}\,\frac{(4-x^2)\sqrt[3]{x+2}}{\cancel{x-2}} =$$

$$= \frac{-4\cancel{(x^2-4)}\sqrt[3]{x+2}}{3\cancel{(x^2-4)}} = \boxed{-\frac{4}{3}\sqrt[3]{x+2}}$$

5. $f'(2)=5$ significa que f es derivable en $x=2$, por lo que, <u>necesariamente</u> $f(x)$ debe ser continua en $x=2$. Lo que no es obligatorio es que el punto sea el $P(2,5)$, ya que 5 es el valor de la derivada <u>no</u> el valor de la función. Por lo tanto, FALSA.

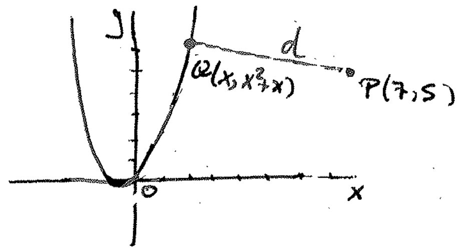
6. $y=6\ln x-2x \to y'=\frac{6}{x}-2$

$\alpha=135^\circ \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=-1$; $-1=\frac{6}{x}-2$; $x=6 \to y=6\ln 6-12$

El punto es $\boxed{P(6,\ 6\ln 6-12)}$

7

$P(7,5)$
$Q(x, x^2+x)$ | $\vec{PQ} = (x-7, x^2+x-5)$;



$$d = \sqrt{(x-7)^2+(x^2+x-5)^2}$$

$$d' = \frac{\cancel{2}(x-7)+\cancel{2}(x^2+x-5)(2x+1)}{\cancel{2}\sqrt{(x-7)^2+(x^2+x-5)^2}} = \frac{x-7+2x^3+x^2+2x^2+x-10x-5}{\sqrt{(x-7)^2+(x^2+x-5)^2}} =$$

$$= \frac{2x^3+3x^2-8x-12}{\sqrt{(x-7)^2+(x^2+x-5)^2}}$$

$$d' = 0 \Rightarrow 2x^3+3x^2-8x-12 = 0$$

	2	3	−8	−12
2		4	14	12
	2	7	6	$\boxed{0}$

$$2x^2+7x+6 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{4} = \frac{-7\pm1}{4} \begin{cases} -3/2 \\ -2 \end{cases}$$

		−2		−3/2		2	
d'	−		+		−		+
d	↘	MIN	↗	MAX	↘	MIN	↗

La función distancia tiene dos mínimos locales (y un máximo local).
Con el perfil:  quedaría comprobar cuál es el mínimo absoluto. Comparamos:

$$x=-2 \longrightarrow d = \sqrt{(-2-7)^2+((-2)^2+(-2)-5)^2} = 3\sqrt{10}$$

$$x=2 \longrightarrow d = \sqrt{(2-7)^2+(2^2+2-5)^2} = \boxed{\sqrt{26}}$$

El punto más cercano es: $Q(2, 2^2+2) = \boxed{Q(2,6)}$

8 $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$

$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$ dominio $= (0,+\infty) - \{1\}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{\ln x} = \frac{0}{-\infty} = 0^-$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{\ln x} &= \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{\ln x} &= \frac{1}{0^+} = +\infty \end{aligned}\right| \text{ Asíntota vertical } x=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\ln x} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{1/x} = \lim_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty \longrightarrow$$ No tiene asíntota horizontal. Podría tenerla oblicua.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2/\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1/x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty \longrightarrow$$ No tiene asíntota oblicua

$$y' = \frac{2x\ln x - x^2 \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{2x\ln x - x}{\ln^2 x}$$

$$y' = 0 \Rightarrow \frac{2x\ln x - x}{\ln^2 x} = 0 \; ; \; 2x\ln x - x = 0 \; ; \; x(2\ln x - 1) = 0$$

$\rightarrow \cancel{x=0}$ No pertenece al dominio

$\rightarrow 2\ln x = 1 \; ; \; \boxed{x = e^{1/2}}$

	0		1		$e^{1/2}$	
y'		$-$		$-$		$+$
y		$\searrow$		$\searrow$	MIN	$\nearrow$

$$y'' = \frac{\left(2\ln x + 2x\frac{1}{x} - 1\right)\ln^2 x - (2x\ln x - x)\cdot 2\ln x\,\frac{1}{x}}{\ln^3 x} = \frac{2\ln^2 x + 2\ln x - \ln x - 4\ln x + 2}{\ln^3 x} =$$

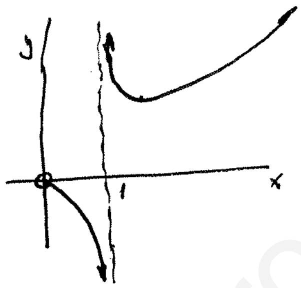
$$= \frac{2\ln^2 x - 3\ln x + 2}{\ln^3 x}$$

$$y'' = 0 \rightarrow \frac{2\ln^2 x - 3\ln x + 2}{\ln^3 x} = 0 \; ; \; 2\ln^2 x - 3\ln x + 2 = 0$$

$$\ln x = \frac{3 \pm \sqrt{9-16}}{4} \quad \text{Absurdo}$$

	0		1	
y''		$-$		$+$
y		Convexa		Cóncava

x	y
$e^{1/2}$	$2e$



(9) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ dom $f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-4x(x^2+1)^{\cancel{2}} - (2-2x^2)\cdot 2\cancel{(x^2+1)}\cdot 2x}{(x^2+1)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{-4x^3 - 4x - 8x + 16x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{12x^3 - 12x}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{12x^3 - 12x}{(x^2+1)^3} = 0 \; ; \; 12x^3 - 12x = 0 \; ; \; 12x(x^2-1) = 0 \; ; \; x = \begin{cases} 0 \\ \pm 1 \end{cases}$$

		-1		0		1	
f''	$-$		$+$		$-$		$+$
f	Conv.	INF	Conc	INF	Conv	INF	Conc

f tiene inflexiones en $x=0$, $x=1$, $x=-1$

(10) $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ K & \text{si } x = 0 \end{cases}$ dom $f = \mathbb{R}$

f está definida y es continua en cualquier $x \neq 0$, por ser diferencia y cociente de funciones continuas y no anularse su denominador.

Veamos en $x=0$:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1 \\ &f(0) = K \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{K=1}$$ para que f sea continua en $x=0$

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x - (e^x - 1)\cdot 1}{x^2} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = \frac{0-1+1}{0} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{e^x} + xe^x - \cancel{e^x}}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}e^x}{2\cancel{x}} = \boxed{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{f'(0) = \frac{1}{2}}$$