

EXAMEN DE CÁLCULO DIFERENCIAL

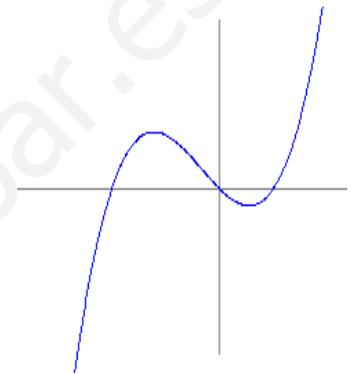
1. Estudia el dominio y las discontinuidades de la función: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{Si } x \leq -1 \\ \frac{3x}{1-4x^2} & \text{Si } -1 < x < 0 \\ x^2 + 3x & \text{Si } x \geq 0 \end{cases}$

2. Estudia las discontinuidades de la función: $f(x) = \frac{x}{1-e^x}$

3. Razona si la siguiente frase es verdadera o falsa poniendo un ejemplo si fuese necesario:
Que la derivada de una función $f(x)$ en $x = 2$ sea 5, implica que **necesariamente** la función sea continua en $x = 2$

4. Deriva y simplifica: $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{1-x}$

5. La figura muestra la gráfica de $f(x)$. Representa la gráfica de $f'(x)$



6. Halla: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}$

(Contesta 3 de las siguientes preguntas. Cada una puntuará 2 puntos sobre el total de 10 del examen)

7. Estudia la derivabilidad de la función: $f(x) = x^2 - 2|x| + 1$ en $x = 0$ aplicando la definición de derivada.

8. Con 150 cm^2 de chapa se desea construir una lata de conservas en forma de cilindro circular recto. Determina la generatriz y el radio para que el volumen sea máximo.

9. Hay dos puntos en la curva representada por la ecuación $x^2 + y^2 - xy + 5y + 2x = 8$ en los cuales la recta tangente forma un ángulo de $+\frac{\pi}{4}$ radianes con relación al semieje X^+ . Halle la ecuación de la recta que une estos dos puntos.

10. Estudia gráficamente la función $y = \frac{(x-3)^2}{x^2}$

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{3x}{1-4x^2} & \text{si } -1 < x < 0 \\ x^2 + 3x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- El 1^{er} y 3^{er} trozo no tienen problemas de discontinuidad por tratarse de expresiones constante y polinómicas respectivamente.

El 2^o trozo no será continuo allí donde se anule el denominador:

$$1-4x^2=0; \quad 4x^2=1; \quad x^2=\frac{1}{4}; \quad x=\begin{cases} \pm \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{No pertenece al 2º Trozo.}$$

Por lo tanto: $\text{dom } f = \mathbb{R} - \{-1/2\}$

- Vamos a la discontinuidad en $x = -1/2$:

$$\lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{3x}{1-4x^2} = \frac{-3/2}{0} = \infty \rightarrow \text{Discontinuidad de Salto Infinito en } x = -1/2$$

- Vamos ahora posibles discontinuidades en $x = -1$, $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1 \quad \left. \begin{array}{l} f(-1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{3 \cdot (-1)}{1-4(-1)^2} = \frac{-3}{1-4} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ es continua en } x = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{3 \cdot 0}{1-4 \cdot 0^2} = 0 \quad \left. \begin{array}{l} f(0) = 0^2 + 3 \cdot 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0^2 + 3 \cdot 0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ es continua en } x = 0$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \frac{x}{1-e^x}$$

$$1-e^x=0; \quad e^x=1; \quad x=0 \quad \text{dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1-e^x} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{-e^x} = \frac{1}{-1} = -1$$

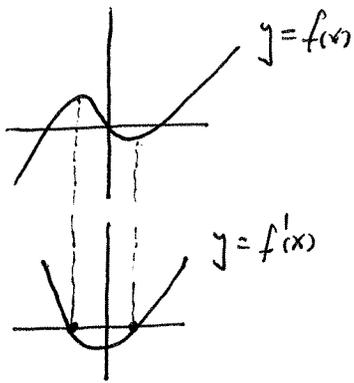
f tiene una discontinuidad evitable en $x=0$

- $\textcircled{3}$ Es verdadera. La derivabilidad necesita necesariamente de la continuidad.

$$\textcircled{4} \quad y = \arctg \frac{x}{1-x}$$

$$y' = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{1 \cdot (1-x) - x \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+x}{\left[1+\frac{x^2}{(1-x)^2}\right] \cdot (1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2+x^2} = \frac{1}{2x^2+2x+1}$$

5



$$\begin{aligned}
 \textcircled{6} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x} &= A^0 = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \cdot \ln \left(\frac{1}{x}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} (-\tan x \cdot \ln x)} \\
 &= e^{-0 \cdot \infty} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/\tan x}} = e^{\frac{-\infty}{+\infty}} \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/\cos^2 x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-\sec^2 x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin^2 x}{x}} \\
 &= e^{\frac{0}{0}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2\sin x \cdot \cos x}{1}} = e^0 = \boxed{1}
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{7} \quad f(x) = x^2 - 2|x| + 1 = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2 + 2h + 1 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (h + 2) = 2$$

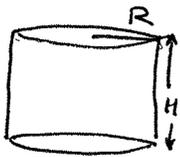
$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 - 2h + 1 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 - 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} (h - 2) = -2$$

No es derivable en $x=0$. Tiene un punto angular.

8

Maximizar: $V = \pi R^2 H$

Siendo: $150 = 2\pi R^2 + 2\pi R H$



$$H = \frac{150 - 2\pi R^2}{2\pi R}$$

$$V = \pi R^2 \frac{150 - 2\pi R^2}{2\pi R} = 75R - \pi R^3$$

$$\frac{dV}{dR} = 75 - 3\pi R^2$$

$$\frac{dV}{dR} = 0 \rightarrow 75 - 3\pi R^2 = 0 ; R = \frac{25}{\pi}$$

	$\frac{25}{\pi}$	
V'	+	-
V	↗	↘
	MAX	

Maximo volumen para $R = \frac{25}{\pi} \text{ cm}$ $\rightarrow H = \frac{150 - 2\pi \left(\frac{25}{\pi}\right)^2}{2\pi \cdot \frac{25}{\pi}} = \frac{150 - \frac{1250}{\pi}}{25} = \boxed{6 - \frac{50}{\pi} \text{ cm}}$

9

$$x^2 + y^2 - xy + 5y + 2x = 11$$

$$2x + 2yy' - y - xy' + 5y' + 2 = 0 ; y' = \frac{y - 2x - 2}{2y - x + 5}$$

$$\alpha = \pi/4 \Rightarrow m = \tan \pi/4 = 1 \rightarrow l = \frac{y - 2x - 2}{2y - x + 5} ; 2y - x + 5 = y - 2x - 2 ;$$

$$y = -x - 7$$

$$x^2 + y^2 - xy + 5y + 2x = 11 \quad y \quad x^2 + (-x-7)^2 - x(-x-7) + 5(-x-7) + 2x = 11$$

$$y = -x - 7$$

$$x^2 + x^2 - 14x + 49 + x^2 + 7x - 5x - 35 + 2x - 11 = 0$$

$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6} = \begin{cases} 3 \rightarrow y = -3 - 7 = -10 \\ -1/3 \rightarrow y = -1/3 - 7 = -22/3 \end{cases}$$

$$A(3, -10)$$

$$B(-1/3, -22/3)$$

$$\overline{AB} = (-1/3 - 3, -22/3 + 10) = (-10/3, 8/3) \rightarrow m = \frac{8/3}{-10/3} = -\frac{8}{10} = -0.8$$

$$y + 10 = -0.8(x - 3)$$

10

$$y = \frac{(x-3)^2}{x^2}$$

$$\text{dominio} = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x-3)^2}{x^2} = \frac{9}{+0} = +\infty \quad \left| \text{Asintota Vertical } x=0 \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x-3)^2}{x^2} = \frac{9}{-0} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-3)^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2} = 1 \rightarrow \text{Asintota Horizontal } y=1$$

$$y' = \frac{2(x-3) \cdot x^2 - (x-3)^2 \cdot 2x}{x^4} = \frac{2x^2 - 6x - 2x^2 + 12x - 18}{x^3} = \frac{6x - 18}{x^3}$$

$$y' = 0 \Rightarrow \frac{6x - 18}{x^3} = 0 ; 6x - 18 = 0 ; x = 3$$

	0	3	
y'	+	-	+
	↗	↘	↗
		MIN	

$$y'' = \frac{6 \cdot x^3 - (6x - 18) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{6x - 18x + 54}{x^4} = \frac{54 - 12x}{x^4}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow \frac{54 - 12x}{x^4} = 0 ; 54 - 12x = 0 ; x = \frac{9}{2}$$

	0	9/2	
y''	+	+	-
	Conv.	Conv.	Conc.
			INF

x	y
3	0
9/2	1/9

