EXAMEN DE CÁLCULO DIFERENCIAL

(Contesta 4 de las siguientes preguntas. Cada una puntuará 1 punto sobre el total de 10 del examen)

1. Dada la curva: $y = 3x - \ln x$ con $x > 0$, escribe la ecuación de la recta normal a dicha curva en $x = 1$

2. Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta. Cuando ha recorrido una distancia *s*, la velocidad *v* de la partícula viene dada por $v = \dfrac{2-s}{s^2+1}$. Halle la aceleración cuando $s = 3$

3. Halla el dominio y la expresión de la función derivada de la función $f(x) = \sqrt{x^5 - 8x^2}$

4. Razona si la siguiente frase es verdadera o falsa poniendo un ejemplo si fuese necesario:

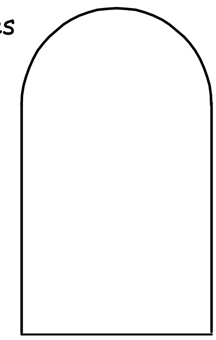
   Si (2, 3) es un punto de la gráfica de una función f(*x*) **necesariamente** será $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$

5. Halla: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - tgx}{x - senx}$

6. Halla las asíntotas de la función $y = \dfrac{2x^3}{x^2 + 3x}$

(Contesta 3 de las siguientes preguntas. Cada una puntuará 2 puntos sobre el total de 10 del examen)

7. Se considera una ventana como la que se indica en la figura (La parte inferior es rectangular, la superior una semicircunferencia). El perímetro de la ventana mide 6 m. Diseña la figura de manera que la superficie de la ventana sea máxima.



8. Estudia la continuidad y la derivabilidad de : $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{Si } x \le -1 \\ 1 - x^2 & \text{Si } -1 < x \le 2 \\ \dfrac{1}{x-3} & \text{Si } x > 2 \end{cases}$

9. Estudia la monotonía, los máximos y mínimos relativos de la función: $f(x) = x^3 - \frac{4}{3}|x|$

10. Halla los valores de *a* y *b* sabiendo que la función $f(x) = x^3 - ax + b$ es una función impar (simétrica respecto del origen) con extremos relativos en $x = \pm 1$

(1) $y = 3x - \ln x$
$y' = 3 - \frac{1}{x}$

$x=1 \rightarrow y = 3 - \ln 1 = 3$
$\rightarrow y' = 3-1 = 2$

Recta Tangente : $y-3 = 2(x-1) \rightarrow \boxed{y = 2x+1}$
Recta Normal : $y-3 = -\frac{1}{2}(x-1) \rightarrow \boxed{y = \frac{7-x}{2}}$

(2) $v = \frac{2-s}{s^2+1} \rightarrow a = \frac{dv}{dt} = \frac{-\frac{ds}{dt}(s^2+1) - (2-s)\cdot 2s \cdot \frac{ds}{dt}}{(s^2+1)^2} = \frac{\frac{ds}{dt}(-1-2s+s^2)}{(s^2+1)^2} = \frac{(s^2-2s-1)\cdot v}{(s^2+1)^2}$

$s=3 \rightarrow v = \frac{2-3}{9+1} = -\frac{1}{10}$
$\rightarrow a = \frac{(9-6-1)\cdot\frac{-1}{10}}{(9+1)^2} = \boxed{\frac{-1}{500}}$

(3) $x^5 - 8x^2 = 0$
$x^2(x^3-8) = 0 \rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$

		0		2	
x^5-8x^2	$-$		$-$		$+$

$f(x) = \sqrt{x^5-8x^2}$ Dominio $f = \{0\} \cup [2,+\infty)$

$f'(x) = \boxed{\frac{5x^4-16x}{2\sqrt{x^5-8x^2}}}$ $\boxed{\text{Dominio } f' = (2,+\infty)}$

NOTA $f'(x)$ se puede simplificar, resultando $f'(x) = \frac{x(5x^3-16)}{2x\sqrt{x^3-8}} = \boxed{\frac{5x^3-16}{2\sqrt{x^3-8}}}$

sin embargo $f(x)$ no se puede simplificar, estaría mal $f(x) = x\sqrt{x^3-8}$

ya que se diferencia de la función original en el punto (aislado) $x=0$

(4) Es falso.
Por ejemplo:

$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \neq 2 \\ x & \text{si } x = 2 \end{cases}$ $f(2) = 3$ pero $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$.

(5) $\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{Tg} x}{x - \operatorname{sen} x} = \frac{0-0}{0-0} = \frac{0}{0} \underset{\text{L'hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\sec^2 x}{1-\cos x} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} \underset{\text{L'hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2\sec x\cdot\sec x\cdot\operatorname{Tg} x}{+\operatorname{sen} x} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{\cancel{\operatorname{sen} x}}{\cos x}}{\cancel{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x\to 0} \frac{-2}{\cos^3 x} = \frac{-2}{1} = \boxed{-2}$

(6) $y = \frac{2x^3}{x^2+3x}$

$x^2+3x = 0$; $x(x+3) = 0$; $x = \begin{cases} 0 \\ -3 \end{cases} \Longrightarrow$ Dominio $= \mathbb{R} - \{0,-3\}$

$\lim_{x\to 0} \frac{2x^3}{x^2+3x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{6x^2}{2x+3} = \frac{0}{3} = 0 \longrightarrow$ No hay asíntota vertical en $x=0$.

$\lim_{x\to -3} \frac{2x^3}{x^2+3x} = \frac{-54}{9-9} = \frac{-54}{0} = \infty \begin{cases} \lim_{x\to -3^-} \frac{2x^3}{x^2+3x} = \frac{-54}{+0} = -\infty \\ \lim_{x\to -3^+} \frac{2x^3}{x^2+3x} = \frac{-54}{-0} = +\infty \end{cases}$ $\boxed{\text{Asíntota Vertical } x=-3}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3}{x^2+3x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x^2}{2x+3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{12x}{2} = \infty \Rightarrow$$ No hay asíntota Horizontal.

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{2x^3}{x^2+3x} : x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3}{x^3+3x^2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x^2}{3x^2+6x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{12x}{6x+6} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{12}{6} = \boxed{2 = m}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{2x^3}{x^2+3x} - 2x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{2x^3} - \cancel{2x^3} - 6x^2}{x^2+3x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{-12x}{2x+3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{-12}{2} = \boxed{-6 = n}$$

$\boxed{\text{Asíntota oblicua } \quad y = 2x-6}$

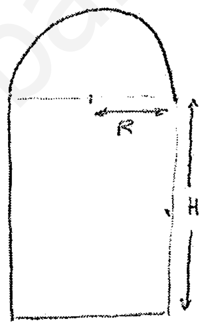
<u>También</u>:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 & x^2+3x \\ \cline{2-2} -2x^3-6x^2 & 2x-6 \leftarrow \text{A. oblicua} \\ \hline -6x^2 & \\ 6x^2+18x & \\ \hline 18x & \end{array}$$

(7)

Perímetro $=6 \longrightarrow \frac{2\pi R}{\cancel{2}} + 2H + 2R = 6 \longrightarrow \boxed{H = \frac{6-2R-\pi R}{2}}$

Superficie $= \frac{\pi R^2}{2} + 2RH$



$$S = \frac{\pi R^2}{2} + \cancel{2}R\,\frac{6-2R-\pi R}{\cancel{2}} = \frac{\pi R^2}{2} + 6R - 2R^2 - \pi R^2 =$$

$$= \frac{\pi R^2 + 12R - 4R^2 - 2\pi R^2}{2} = \frac{12R - 4R^2 - \pi R^2}{2}$$

$$\frac{dS}{dR} = \frac{12 - 8R - 2\pi R}{2} = 6 - 4R - \pi R = 6 - R(\pi+4)$$

$$\frac{dS}{dR} = 0 \Longrightarrow \boxed{R = \frac{6}{\pi+4}}$$

	0		$6/\pi+4$	
$\frac{dS}{dR}$		$+$		$-$
S		$\nearrow$	MAX	$\searrow$

Superficie máxima para $R = \boxed{\frac{6}{\pi+4}\ m} \longrightarrow H = \frac{6 - \frac{12}{\pi+4} - \frac{6\pi}{\pi+4}}{2} = \frac{\cancel{6\pi} + 24 - 12 - \cancel{6\pi}}{2(\pi+4)} = \boxed{\frac{6}{\pi+4}\ m}$

(8) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \le -1 \\ 1-x^2 & \text{si } -1 < x \le 2 \\ \frac{1}{x-3} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ Dominio $= (-\infty,-1] \cup (-1,2] \cup (2,3) \cup (3,+\infty) = \mathbb{R} - \{3\}$

$x+1$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$ por ser polinómica

$1-x^2$ " " " " " " " "

$\frac{1}{x-3}$ " " " " en $\mathbb{R}-\{3\}$ por ser racional

Veamos la continuidad en $x=-1$, $x=2$, $x=3$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -1^-} f(x) = -1+1 = 0 \\ f(-1) = -1+1 = 0 \\ \lim_{x\to -1^+} f(x) = 1-(-1)^2 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) \text{ es continua en } x=-1$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1-4 = -3 \\ \quad f(2) = 1-4=-3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \dfrac{1}{2-3} = -1\end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \text{ tiene una discontinuidad de salto finito en } x=2$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \frac{1}{3-3} = \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow f(x) \text{ tiene una discontinuidad asintótica en } x=3$$

$$\boxed{f(x) \text{ es continua en } \mathbb{R}-\{2,3\}}$$

$f(x)$ no puede ser derivable en $x=2$, ni en $x=3$, por no ser continua

Veamos la derivabilidad en $x=-1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x<-1 \\ -2x & \text{si } -1<x<2 \\ \dfrac{-1}{(x-3)^2} & \text{si } x>2 \end{cases} \qquad \left.\begin{array}{l} f'(-1^-) = 1 \\ f'(-1^+) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \text{ no es derivable en } x=-1, \text{ tiene un punto anguloso.}$$

$$\boxed{f(x) \text{ es derivable en } \mathbb{R}-\{-1,2,3\}}$$

(9) $$f(x) = x^3 - \frac{4}{3}|x| = \begin{cases} x^3-\frac{4}{3}x & \text{si } x\geq 0 \\ x^3+\frac{4}{3}x & \text{si } x<0\end{cases} \qquad \text{Dominio} = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2-\frac{4}{3} & \text{si } x>0 \\ 3x^2+\frac{4}{3} & \text{si } x<0\end{cases} \qquad \left.\begin{array}{l} f'(0^+) = -\frac{4}{3} \\ f'(0^-) = \frac{4}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \text{ no es derivable en } x=0, \text{ tiene un punto anguloso}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow$

- $3x^2-\frac{4}{3}=0$ (para los $x>0$) $\rightarrow x^2=\frac{4}{9}$; $x = \frac{2}{3}$, $\cancel{-\frac{2}{3}}$
- $3x^2+\frac{4}{3}=0$ (para los $x<0$) $\rightarrow x^2=-\frac{4}{9}$ $\times$

		0		2/3	
$f'(x)$	+		−		+
$f(x)$	↗		↘		↗

$f(x)$ es creciente en $(-\infty,0)\cup(\frac{2}{3},+\infty)$
$f(x)$ es decreciente en $(0,2/3)$
$f(x)$ tiene un máximo relativo en $x=0$ (que es punto anguloso)
$f(x)$ " " mínimo " en $x=2/3$

(10) $f(x) = x^3-ax+b$; $f'(x) = 3x^2-a$

f impar $\Rightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow (-x)^3-a(-x)+b = -(x^3-ax+b) \quad \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow -x^3+ax+b = -x^3+ax-b \Rightarrow 2b=0 \Rightarrow \boxed{b=0}$

f tiene extremos relativos en $x=\pm 1 \Rightarrow f'(\pm 1)=0 \rightarrow 3-a=0$; $\boxed{a=3}$

$$\boxed{f(x) = x^3-3x}$$