EXAMEN DE CÁLCULO DIFERENCIAL

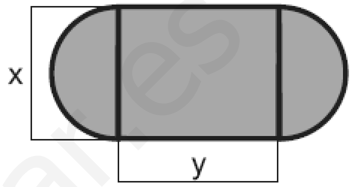
1. Sea f(x) la función definida por las expresiones $f(x)=\begin{cases} 3senx-\cos x & \text{si } x\geq 0 \\ \dfrac{mx+n}{1-x} & \text{si } x<0 \end{cases}$ siendo ***m*** y ***n*** dos números reales

   a) Halla razonadamente el dominio de f(x)

   b) Calcula ***m*** y ***n*** para que f(x) sea continua en todo su dominio

   c) Calcula ***m*** y ***n*** para que f(x) sea derivable en todo su dominio

2. Se dispone de 200 m de tela metálica y se desea vallar un recinto formado por un rectángulo y dos semicírculos como indica la figura. Determine las dimensiones de x e y para que el área encerrada sea máxima.



3. Calcule: a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$ b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos x\right)^{\frac{1}{\cos x}}$

4. Se considera la función real $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ donde a, b y c son números reales.

   Encuentre los valores de a, b y c para que las rectas tangentes en los puntos de abscisas x=2 y x=4 sean paralelas al eje OX, sabiendo además que el punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ está en el eje OX.

5. Consideraremos al neumático de una bicicleta como un cilindro con una longitud fija de 200 cm con sus dos bases unidas. El radio r irá incrementándose conforme vayamos hinchando el neumático incrementando su volumen a una tasa constante de 30 cm^3s^{-1}. Halle la tasa de cambio del radio del neumático cuando r = 2 cm.

6. Halle el máximo área de un rectángulo con los dos vértices inferiores situados en el eje X y los dos vértices superiores situados sobre la curva $y=senx$, para $0\leq x\leq\pi$.

① $f(x) = \begin{cases} 3\,\text{sen}\,x - \cos x & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{mx+n}{1-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a)

$3\,\text{sen}\,x - \cos x$ es continua en cualquier $x \in \mathbb{R}$

$\dfrac{mx+n}{1-x}$ no estaría definida en $x=1$, pero $1 \not< 0$. Por lo tanto

Tendremos : $\boxed{\text{dom}\, f = \mathbb{R}}$

b)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{mx+n}{1-x} = n \\ f(0) = 3\,\text{sen}\,0 - \cos 0 = 3 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (3\,\text{sen}\,x - \cos x) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{n=3}$$

para que f sea continua en $x=0$.
'm' podría tomar cualquier valor.

c) $f'(x) = \begin{cases} 3\cos x + \text{sen}\,x & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{m(1-x) - (mx+n)(-1)}{(1-x)^2} = \dfrac{m+n}{(1-x)^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \dfrac{m+n}{(1-0)^2} = m+n \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 3\cos 0 + \text{sen}\,0 = 3 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{m+n=3}$$

Como la derivabilidad exige la continuidad, deben cumplirse ambas condiciones :

$$\left.\begin{array}{l} n=3 \\ m+n=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} n=3 \\ m=0 \end{array}}$$ para que sea derivable en $x=0$

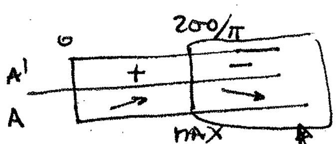
② Maximizar $A = \pi \cdot \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + xy = \dfrac{\pi x^2}{4} + xy$

Siendo : $200 = 2\pi \cdot \dfrac{x}{2} + 2y = \pi x + 2y \longrightarrow y = 100 - \dfrac{\pi}{2} x$

$A = \dfrac{\pi x^2}{4} + x\left(100 - \dfrac{\pi}{2} x\right) = \dfrac{\pi x^2}{4} + 100x - \dfrac{\pi x^2}{2} = 100x - \dfrac{\pi x^2}{4}$

$\dfrac{dA}{dx} = 100 - \dfrac{\pi}{4} \cdot 2x = 100 - \dfrac{\pi}{2} x$

$\dfrac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow 100 - \dfrac{\pi}{2} x = 0$; $x = \dfrac{200}{\pi}$



Área Máxima para $\boxed{x = \dfrac{200}{\pi}\ m} \rightarrow \boxed{y = 0\ m}$

Área Máxima $= \boxed{3183\ m^2}$

El recinto tendría forma circular.

En realidad, este intervalo no sería posible, ya que sería $y<0$.

(3) a) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}\,\sin x}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}\sin x+\sqrt{1+x^2}\cos x}=\frac{1}{0+1\cdot 1}=\boxed{1}$$

b) $$\lim_{x\to \pi/2}(1+2\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}=(1+0)^{\frac{1}{0}}=1^{\infty}=e^{\lim_{x\to\pi/2}\ln(1+2\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}}=$$

$$=e^{\lim_{x\to\pi/2}\frac{1}{\cos x}\ln(1+2\cos x)}=e^{\lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln(1+2\cos x)}{\cos x}}=e^{\frac{\ln 1}{0}}=e^{\frac{0}{0}}=$$

$$=e^{\lim_{x\to\pi/2}\frac{\frac{-2\sin x}{1+2\cos x}}{-\sin x}}=e^{\lim_{x\to\pi/2}\frac{1}{1+2\cos x}}=e^{1/1}=\boxed{e}$$

(4) $$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \longrightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b \longrightarrow f''(x)=6x+2a$$

$$f'(2)=0 \Rightarrow 3\cdot 2^2+2a\cdot 2+b=0 \;;\; 4a+b=-12$$

$$f'(4)=0 \Rightarrow 3\cdot 4^2+2a\cdot 4+b=0 \;;\; 8a+b=-48$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow 6x+2a=0 \;;\; x=\frac{-2a}{6}=-\frac{a}{3} \longrightarrow y=\left(-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(-\frac{a}{3}\right)^2+b\frac{-a}{3}+c=$$

$$=\frac{-a^3}{27}+\frac{a^3}{9}-\frac{ab}{3}+c=$$

$$=\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c$$

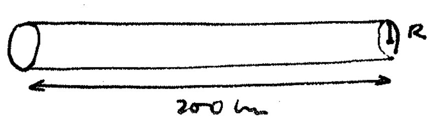
$$\begin{cases}4a+b=-12\\ 8a+b=-48\end{cases}$$

$$4a=-36 \longrightarrow \boxed{a=-9} \;;\; 4\cdot(-9)+b=-12 \;;\; \boxed{b=24}$$

Que la inflexión se produzca sobre el eje X significa que:

$$\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c=0 \;;\; c=\frac{ab}{3}-\frac{2a^3}{27}=\frac{(-9)\cdot 24}{3}-\frac{2(-9)^3}{27}=\boxed{-18}$$

(5) $$V=\pi R^2\cdot 200=200\pi R^2$$



$$\frac{dV}{dt}=200\pi\cdot 2R\frac{dR}{dt}=400\pi R\frac{dR}{dt}$$

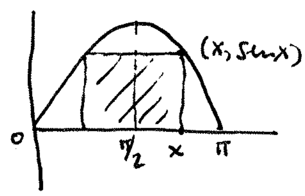
$$\frac{dV}{dt}=30 \Rightarrow 30=400\pi R\frac{dR}{dt} \;;\; \frac{dR}{dt}=\frac{3}{40\pi R}$$

$$R=2 \Rightarrow \frac{dR}{dt}=\frac{3}{40\pi\cdot 2}=0'0119 \text{ cm/seg.}$$

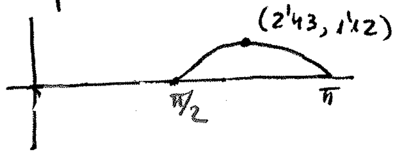
(6) Base $=2\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=2x-\pi$

Altura $=\operatorname{sen}x$

Área $=(2x-\pi)\operatorname{sen}x \qquad x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$



Representando la función $y=(2x-\pi)\operatorname{sen}x$ con la calculadora gráfica:



Tendremos el máximo valor de área para $x=2'43$, $\boxed{A_{MAX}=1'12}$