

Examen de matrices y determinantes- 2º BACHILLERATO

Nombre: _____

1. a) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcular A^n .

b) Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, calcular el valor de los siguientes determinantes.

i) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

ii) $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+2 & b+2 & c+2 \\ x/3 & y/3 & z/3 \end{vmatrix}$

(2 puntos)

2. Calcular el rango de la matriz A según los diferentes valores del parámetro real a :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

3. a) Determinar la matriz X para que tenga solución la ecuación $C.(A+X).B=I$, donde las matrices A , B y C son matrices no singulares de orden n , e I es la matriz identidad de orden n .

b) Aplicar el resultado anterior para: $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

NOTA: Matriz singular es aquella de determinante nulo.

(3 puntos)

4. Para cada número real b , $M(b)$ es la matriz $M(b) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & b \\ 2 & 1 & 2 \\ b & b & -1 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Obtener el determinante de la matriz $M(b)$, y justificar que para cualquier número real b existe la matriz $M(b)^{-1}$.

b) Calcular la matriz $M(0)^{-1}$.

c) Si $A = M(8)$, $B = M(4)$ y $C = M(3)$, calcúlese, razonadamente el determinante de la matriz $A.B^{-1}.C^{-1}$.

(3 puntos)

$$① a) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ siendo } n, \text{ natural}$$

Suponemos cierto para n .

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & n+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ se verifica}$$

para $n+1 \Rightarrow$ Cierta para $\forall n$.

$$b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$$

$$c) \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

Voy a llegar a este haciendo las oportunas transformaciones con el conocido en el enunciado.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -(-) \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{3} \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \boxed{3 \cdot 5 = 15}$$

c) $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+2 & b+2 & c+2 \\ x/3 & y/3 & z/3 \end{vmatrix}$ Voy a intentar llegar al original.

$$\frac{5}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+2 & b+2 & c+2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \frac{5}{3} \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ x & y & z \end{vmatrix} \right)$$

R₂ = 2F₁.

$$= \frac{5}{3} \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = \frac{5}{3} \cdot 5 = \frac{25}{3}$$

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

Como \mathbb{R}^3 de dimensión $3 \times 4 \Rightarrow$ Máximo valor del rango es 3.

Como $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 2 = 8 \neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{Rg } A = 2 \text{ como mínimo}}$

Ahora vamos a ver los menores de orden 3

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & a \\ -1 & 0 & -1 \\ 5 & a+4 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{por } C_3]{\text{Desarrollo}} (a+4)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & a \\ -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$a = -4$$

$$(a+4) \cdot (-1) \cdot (-2+a) = (a+4)(2-a) = 0 \begin{cases} a = -4 \\ a = 2 \end{cases}$$

Si $a \neq 2$ y $a \neq -4 \Rightarrow \boxed{\text{Rg } A = 3}$

Si $\boxed{a = 2}$

$$\text{Rg} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$|E_1 E_2 E_3| = 0 \rightarrow |C_1 C_2 C_4| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - 8 - 24 = -32 \neq 0$$

$\boxed{\text{Rg } A = 3}$

Si $\boxed{a = -4}$

$$\text{Rg} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 6 + 30 + 8 + 10 + 24 + 12 = 0$$

$\Rightarrow \boxed{\text{Rg } A = 2}$

$$3) a) C \cdot (A+X) \cdot B = I$$

$$C^{-1} \cdot C \cdot (A+X) \cdot B B^{-1} = C^{-1} \cdot I \cdot B^{-1}$$

$$A+X = C^{-1} \cdot B^{-1}; \quad \boxed{X = C^{-1} B^{-1} - A}$$

$$b) A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 6 - 4 = 2$$

$$B = I$$

$$C = I$$

~~$$A_{11} = 2 \quad A_{22} = 1$$~~

$$B_{11} = 1 \quad B_{12} = 0$$

$$C_{11} = 1 \quad C_{12} = -1$$

~~$$A_{21} = -4 \quad A_{22} = 3$$~~

$$C_{21} = 0 \quad C_{22} = 1$$

~~$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$~~

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$4) M(b) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & b \\ 2 & 1 & 2 \\ b & b & -1 \end{pmatrix}$$

$$|M(b)| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & b \\ 2 & 1 & 2 \\ b & b & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2 = C_2 - C_1} \begin{vmatrix} 4 & -1 & b \\ 2 & -1 & 2 \\ b & 0 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2 = C_2 + bC_3} \begin{vmatrix} 4+b^2 & -1 & b \\ 2+2b & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Desarrollar por } F_3}$$

$$(-1) \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 4+b^2 & -1 \\ 2+2b & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2 = F_2 + F_1} - \begin{vmatrix} 4+b^2 & -1 \\ -2+2b-b^2 & 0 \end{vmatrix} = -(b-1)(-1)^{1+2} |-2+2b-b^2|$$

$$= \boxed{b^2 - 2b + 2 = \Phi M(b) |}$$

$$|M(b)| = 0 \Rightarrow b^2 - 2b + 2 = 0; \quad b = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} \quad \text{A solution}$$

$$\text{Dsi } |M(b)| \neq 0 \text{ para } \forall b \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{\exists M(b)^{-1} \forall b \in \mathbb{R}}$$

$$b) M(c) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|M(c)| = 2.$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \quad M_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \quad M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{21} = - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -4 \quad M_{23} = - \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \quad M_{32} = - \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -8 \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

$$M^{-1}(c) = \frac{1}{|M(c)|} \cdot \text{Adj}(M)^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 2 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 & 3 \\ 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Por las propiedades de los determinantes.

$$|A \cdot B^{-1} \cdot C^{-1}| = |A| \cdot |B^{-1}| \cdot |C^{-1}| = |A| \cdot \frac{1}{|B|} \cdot \frac{1}{|C|} = |M(8)| \cdot \frac{1}{|M(4)|} \cdot \frac{1}{|M(3)|}$$

$$|M(b)| = b^2 - 2b + 2$$

$$|M(8)| = 8^2 - 2 \cdot 8 + 2 = 64 - 16 + 2 = 50$$

$$|M(4)| = 4^2 - 2 \cdot 4 + 2 = 16 - 8 + 2 = 10$$

$$|M(3)| = 3^2 - 2 \cdot 3 + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$$

$$\boxed{|AB^{-1}C^{-1}| = 50 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{50}{50} = 1}$$