Examen de análisis - 2º BACHILLERATO

Nombre:____

1. Considera:

   a) $\lim_{\ \to -1}\left(\frac{3-2x}{^2+1}\right)^{\frac{x}{x+3}} =$ (1 punto)

   b) $\lim_{\ \to 2}\left(\frac{^2-4}{3-\sqrt{x+7}}\right) =$ (1 punto)

2. Se considera la función: $g(x)=\begin{cases} x & si\ x<1 \\ x+1 & si\ x\geq 1 \end{cases}$ y las funciones:

   $$f_1(x)=(x-1)\cdot g(x) \quad y \quad f_2(x)=(x-1)^2\cdot g(x)$$

   Estudia la derivabilidad de las funciones $f_1(x)\ y\ f_2(x)$.

   (2 puntos)

3. Determina las rectas tangentes a $4x-2y^2=1$ en el punto x=1. (2 puntos)
4. Deriva y simplifica al máximo: $y=(senx)^{cosx}$ (1,25 puntos)
5. Resuelve los siguientes apartados

   a) Define la continuidad de una función en un punto así como los tipos de discontinuidades que nos podemos encontrar. (1 punto)

   b) Analiza la continuidad, en el punto x=0, de la función dada por:

   $$f(x)=\begin{cases} \frac{\ \ ^{-1}}{\ } & si\ x<0 \\ \frac{cos\ }{^2+1} & si\ x\geq 0 \end{cases}.$$ (1,75 puntos)

www.yoquieroaprobar.es

OPCIÓN A:

1º

a) $\lim_{x\to -1} \left(\frac{3-2.x}{x^2+1}\right)^{\frac{x}{x+3}} = \lim_{x\to -1}\left(\frac{3-2x}{x^2+1}\right)^{\lim_{x\to -1}\frac{x}{x+3}}$

$\left(\frac{3-2(-1)}{(-1)^2+1}\right)^{\frac{-1}{-1+3}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-1/2} = \boxed{\sqrt{\frac{2}{5}}}$

b) $\lim_{x\to 2} \left(\frac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}}\right) = \frac{2^2-4}{3-\sqrt{9}} = \frac{0}{0} = ?$

$\lim_{x\to 2} \left(\frac{(x^2-4)\cdot(3+\sqrt{x+7})}{(3-\sqrt{x+7})(3+\sqrt{x+7})}\right) = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)(3+\sqrt{x+7})}{9-(\sqrt{x+7})^2}$

$= \lim_{x\to 2} \frac{-(x+2)\cancel{(2-x)}\cdot(3+\sqrt{x+7})}{\cancel{2-x}} = \lim_{x\to 2} -(x+2)(3+\sqrt{x+7})$

$= -(2+2)\cdot(3+\sqrt{2+7}) = -4(3+3) = -24$

www.yoquieroaprobar.es

②

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x+1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f_1(x) = (x-1) \cdot g(x) = \begin{cases} (x-1) \cdot x & \text{si } x < 1 \\ (x-1)(x+1) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f_2(x) = (x-1)^2 \cdot g(x) = \begin{cases} (x-1)^2 \cdot x & \text{si } x < 1 \\ (x-1)^2 (x+1) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Para que las funciones sean derivables, tienen que ser CONTINUAS:

$f_1(x)$ es CONTINUA en $(-\infty, 1)$ y en $(1, \infty)$ por ser PRODUCTO DE FUNCIONES CONTINUAS. Falta estudiar en $x = 1$.

1) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f_1(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f_1(x) = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$

2) $\boxed{f_1(1) = 0}$

3) $\lim\limits_{x \to 1} f_1(x) = f_1(1) = 0 \Rightarrow$ $f_1(x)$ es CONTINUA en $x = 1 \Rightarrow$ $f_1(x)$ es CONTINUA en $\mathbb{R}$

$f_2(x)$ es CONTINUA en $(-\infty, 1)$ y en $(1, \infty)$ por ser PRODUCTO DE FUNCIONES CONTINUAS. Estudiamos en $x = 1$.

1) $\lim\limits_{x \to 1^-} f_2(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f_2(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} f_2(x) = 0$

2) $f_2(1) = 0$

3) $\lim\limits_{x \to 1} f_2(x) = f_2(1) = 0 \Rightarrow$ $f_2(x)$ es CONTINUA en $x = 1 \Rightarrow$ $f_2(x)$ es CONTINUA en $\mathbb{R}$.

www.yoquieroaprobar.es

Una vez que se conoce que $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son continuas en $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ Para que sean derivables en un punto deben $\exists$ y ser iguales $\boxed{f'(a^-) = f'(a^+)}$

Como $f_1(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f_1'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Como $f_1(x)$ es DERIVABLE en $(-\infty, 1)$ y $(1, \infty)$ $\Rightarrow$ Estudio en $x = 1$ y

$$\left.\begin{aligned} f_1'(1^-) &= 2 \cdot 1 - 1 = 1 \\ &\neq \\ f_1'(1^+) &= 2 \cdot 1 = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$f_1(x)$ NO es DERIVABLE en $x = 1$.

$\boxed{f_1(x) \text{ es DERIVABLE en } \mathbb{R} - \{1\}}$

$f_2(x) = \begin{cases} x^3 - 2x^2 + x & \text{si } x < 1 \\ x^3 - x^2 - x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \rightarrow f_2'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4x + 1 & \text{si } x < 1 \\ 3x^2 - 2x - 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

Como $f_2(x)$ es DERIVABLE en $(-\infty, 1)$ y $(1, \infty)$ $\Rightarrow$

Estudio en $x = 1$ y

$$\left.\begin{aligned} f_2'(1^-) &= 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 1 = 0 \\ &\parallel \\ f_2'(1^+) &= 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 1 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$f_2(x)$ es DERIVABLE en $x = 1$.

$\boxed{f_2(x) \text{ es DERIVABLE en } \mathbb{R}}$

www.yoquieroaprobar.es

(3) $4x-2y^2-1=0$; ~~Por~~ derivación implícita.

$4-4yy'=0 \rightarrow \boxed{y'=\frac{4}{4y}=\frac{1}{y}}$

En $x=1$ es $4\cdot 1-2y^2-1=0$; $3=2y^2$; $y=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

Los puntos son $\left(1,\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ y $\left(1,-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

$\boxed{y-y_0=y'_{x_0}(x-x_0)}$; $\boxed{y-y_0=-\frac{1}{y'_{x_0}}(x-x_0)}$

RECTA TANGENTE

RECTA NORMAL

En $\left(1,\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$; ~~es~~ $y'_{x_0}=\frac{1}{\sqrt{3/2}}=\sqrt{2/3}$

En $\left(1,-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$; $y'_{x_0}=\frac{1}{-\sqrt{3/2}}=-\sqrt{2/3}$

$y-\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{\frac{2}{3}}(x-1)$; $\boxed{y=\sqrt{\frac{2}{3}}x-\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{2}}}$ Tangente 1

$y+\sqrt{\frac{3}{2}}=-\sqrt{2/3}(x-1)$; $\boxed{y=-\sqrt{\frac{2}{3}}x+\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{\frac{3}{2}}}$ Tangente 2

(4) $y=(\operatorname{sen}x)^{\cos x}$ Por derivación Logarítmica

$\ln y=\cos x \ln \operatorname{sen}x$; Derivo ambos miembros

$\frac{y'}{y}=-\operatorname{sen}x \ln \operatorname{sen}x+\cos x\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}x}\cdot\cos x$;

$y'=y(-\operatorname{sen}x \ln \operatorname{sen}x+\operatorname{ctg}x\cdot\cos x)$

$\boxed{y'=(\operatorname{sen}x)^{\cos x}(-\operatorname{sen}x\cdot\ln \operatorname{sen}x+\operatorname{ctg}x\cos x)}$

5) a) $f(x)$ es continua en $x=a$ si se cumplen las tres condiciones:

$$\begin{cases} 1) \ \exists \lim\limits_{x\to a} f(x). \text{ Para ello debe ser } \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \\ 2) \ \exists f(a) \\ 3) \ \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) \end{cases}$$

Dependiendo de cual de las tres condiciones falle aparecen los distintos tipos de discontinuidad.

<u>DISCONTINUIDAD EVITABLE</u> $\boxed{\text{Si } \lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)}$

<u>DISCONTINUIDAD INEVITABLE:</u>

<u>- De salto finito:</u> Cuando $\boxed{\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)}$

<u>- De salto infinito:</u> Cuando $\boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \ \text{ o} \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty\end{array}}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x} & \text{si } x<0 \\ \dfrac{\cos x}{x^2+1} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x-1}{x} = \dfrac{-1}{-0{,}001} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{1}{1} = 1 \end{cases}$$

No es continua en $x=0$ y tiene una Discontinuidad inevitable de salto infinito.

www.yoquieroaprobar.es