POLINOMIOS Y FRACCIONES ALGEBRAICAS.

Ejercicio nº 1.-

Halla el cociente y el resto de cada división:

a) $\left(4x^3 - 2x^2 + 5x + 3\right) : \left(x^2 - 2\right)$

b) $\left(x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 5\right) : \left(x + 1\right)$

Ejercicio nº 2.-

Factoriza los polinomios siguientes:

a) $x^3 + 2x^2 + x$

b) $x^3 + 7x^2 + 7x - 15$

c) $x^5 - x^4 - x^3 - 2x^2$

Ejercicio nº 3.-

Calcula el máx.c.d. y el mín.c.m. de los siguientes polinomios:

$P(x) = x^2 - 1$

$Q(x) = x^2 - 2x + 1$

Ejercicio nº 4.-

Descompón en factores el numerador y el denominador, y luego simplifica.

$$\frac{x^3 - 49x}{x^4 - 7x^3}$$

Ejercicio nº 5.-

Opera y simplifica:

a) $\dfrac{2x}{x+1} : \left(\dfrac{2x}{x+1} - 1\right)$

b) $\dfrac{x-2}{2x} - \dfrac{1-3x}{3x^2} + \dfrac{2x^2+3}{6x^4}$

SOLUCIONES

Ejercicio nº 1.-

Halla el cociente y el resto de cada división:

a) $\left(4x^3 - 2x^2 + 5x + 3\right) : \left(x^2 - 2\right)$

b) $\left(x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 5\right) : \left(x + 1\right)$

Solución:

a)
$$\begin{array}{rrrr|l} 4x^3 & -2x^2 & +5x & +3 & x^2-2 \\ \cline{5-5} -4x^3 & & +8x & & 4x-2 \\ \cline{1-4} & -2x^2 & +13x & +3 & \\ & 2x^2 & & -4 & \\ \cline{2-4} & & 13x & -1 & \end{array}$$

Cociente = $4x - 2$

Resto = $13x - 1$

b) Aplicamos la regla de Ruffini:

	1	−3	2	0	5
−1		−1	4	−6	6
	1	−4	6	−6	11

Cociente = $x^3 - 4x^2 + 6x - 6$

Resto = 11

Ejercicio nº 2.-

Factoriza los polinomios siguientes:

a) $x^3 + 2x^2 + x$
b) $x^3 + 7x^2 + 7x - 15$
c) $x^5 - x^4 - x^3 - 2x^2$

Solución:

a) Sacamos factor común y utilizamos que $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$:

$x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x + 1)^2$

b) Utilizamos la regla de Ruffini:

	1	7	7	−15
1		1	8	15
	1	8	15	0
−3		−3	−15	
	1	5	0	

$x^3 + 7x^2 + 7x - 15 = (x - 1)(x + 3)(x + 5)$

c) Todos los sumandos tienen el factor x^2. Por tanto, podemos sacar x^2 como factor común:

$P(x) = x^2(x^3 - x^2 - x - 2)$

Utilizamos la regla de Ruffini para localizar una raíz entre los divisores de 2.

	1	–1	–1	–2
2		2	2	2
	1	1	1	0

El polinomio de segundo grado resultante, $x^2 + x + 1$, es irreducible. Por tanto, la factorización es:

$P(x) = x^2(x - 2)(x^2 + x + 1)$

<u>Ejercicio nº 3.-</u>

Calcula el máx.c.d. y el mín.c.m. de los siguientes polinomios:

$P(x) = x^2 - 1$

$Q(x) = x^2 - 2x + 1$

Solución:

Los polinomios factorizados son:

$P(x) = (x + 1)(x - 1)$

$Q(x) = (x - 1)^2$

Por tanto:

máx.c.d. = $(x - 1)$ mín.c.m. = $(x - 1)^2 (x + 1)$

<u>Ejercicio nº 4.-</u>

Descompón en factores el numerador y el denominador, y luego simplifica.

$$\frac{x^3 - 49x}{x^4 - 7x^3}$$

Solución:

$$\frac{x^3 - 49x}{x^4 - 7x^3} = \frac{x\left(x^2 - 49\right)}{x^3\left(x - 7\right)} = \frac{x\left(x - 7\right)\left(x + 7\right)}{x^3\left(x - 7\right)} = \frac{x + 7}{x^2}$$

En el primer paso sacamos factor común; en el segundo paso aplicamos la identidad notable

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ a la expresión x^2-49, y finalmente dividimos numerador y denominador entre el máx.c.d. de ambos, que es $x\,(x-7)$.

__Ejercicio nº 5.-__

Opera y simplifica:

a) $\dfrac{2x}{x+1}:\left(\dfrac{2x}{x+1}-1\right)$

b) $\dfrac{x-2}{2x}-\dfrac{1-3x}{3x^2}+\dfrac{2x^2+3}{6x^4}$

Solución:

a) El paréntesis da prioridad a la resta:

$$\frac{2x}{x+1}-1=\frac{2x}{x+1}-\frac{x+1}{x+1}=\frac{x-1}{x+1}$$

Efectuamos el cociente:

$$\frac{2x}{x+1}:\frac{x-1}{x+1}=\frac{2x(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{2x}{x-1}$$

b) mín.c.m. $(2x,\ 3x^2,\ 6x^4)=6x^4$

Así:

$$\frac{x-2}{2x}-\frac{1-3x}{3x^2}+\frac{2x^2+3}{6x^4}=\frac{3x^3(x-2)}{6x^4}-\frac{2x^2(1-3x)}{6x^4}+\frac{2x^2+3}{6x^4}=$$

$$=\frac{3x^4-6x^3-2x^2+6x^3+2x^2+3}{6x^4}=\frac{3x^4+3}{6x^4}=\frac{3(x^4+1)}{6x^4}=\frac{x^4+1}{2x^4}$$