

1. **[2 puntos; 1 punto por apartado]** Resuelve las siguientes integrales indefinidas usando el método que consideres más adecuado.

a) $\int xe^{2x} dx$

b) $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} dx$

2. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = x$

- a) **[1 punto]** Representa gráficamente la región comprendida entre las gráficas de las funciones f y g .
b) **[1 punto]** Calcula el área de la región anterior.

3. **[3 puntos; 1,5 puntos por apartado]** Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones, el primero por el método de Gauss y el segundo usando el método matricial.

a)
$$\begin{cases} -2x - 2 = y - 3 \\ x + 1 = z \\ x - y - 3z = -4 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -x + 2y + 3z = 4 \\ x - z = 2 \end{cases}$$

4. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. Dada la siguiente ecuación matricial $ABX - I = 2X$,

en la que I es la matriz identidad de orden 3 y X es una matriz cuadrada de orden 3, se pide:

- a) **[1 punto]** Despeja la matriz X .
b) **[1 punto]** Calcula la matriz X .

5. **[1 punto]** Resuelve la ecuación
$$\begin{vmatrix} 2x-1 & 3x & x-2 \\ 2x+1 & x & 2x+1 \\ 2x-1 & 3x & 3x-2 \end{vmatrix} = 0.$$

Importante

En la obtención de la matriz inversa de una matriz, es obligatorio calcular explícitamente el determinante de la matriz dada, escribir su matriz adjunta y hacer el cálculo de la matriz inversa mediante la expresión de la fórmula correspondiente.

Soluciones

$$1. \text{ a) } \int xe^{2x} dx = \left[\begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = e^{2x} dx \quad v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right] = \frac{1}{2} xe^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{1}{2} xe^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx =$$

$$= \frac{1}{2} xe^{2x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2x} + C = \frac{1}{2} xe^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C = \frac{1}{2} e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C$$

b) La factorización del polinomio $x^3 - x^2 - x + 1$ es $(x+1)(x-1)^2$. Descompongamos pues la fracción

$$\frac{3x+5}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{3x+5}{(x+1)(x-1)^2} \text{ en fracciones simples.}$$

$$\frac{3x+5}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x+1)}{(x+1)(x-1)^2}$$

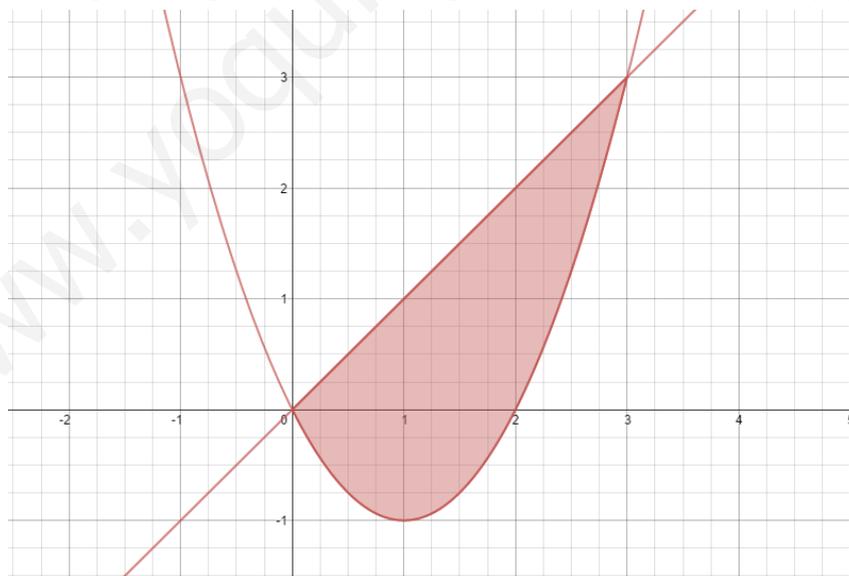
$$\text{Igualando los numeradores: } 3x+5 = A(x-1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x+1).$$

Si $x=1$, tenemos que $8=2C \Rightarrow C=4$. Si $x=-1$, tenemos que $2=4A \Rightarrow A=\frac{1}{2}$. Y si $x=0$, tenemos

$$\text{que } 5 = \frac{1}{2} - B + 4 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}. \text{ Por tanto: } \frac{3x+5}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{1/2}{x+1} + \frac{-1/2}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2}, \text{ es decir:}$$

$$\int \frac{3x+5}{x^3 - x^2 - x + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx + 4 \int \frac{1}{(x-1)^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \ln(x-1) - \frac{4}{x-1} + C$$

2. La representación de la región comprendida entre las gráficas de las funciones f y g es:



Calculemos la coordenada x o abscisa de los puntos de corte de ambas funciones:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 2x = x \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

De las dos funciones, la que está por encima es g , con lo que el área de la región será:

$$A = \int_0^3 (g(x) - f(x)) dx = \int_0^3 [x - (x^2 - 2x)] dx = \int_0^3 (-x^2 + 3x) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_0^3 =$$

$$= \left(-\frac{3^3}{3} + \frac{3 \cdot 3^2}{2} \right) - 0 = -9 + \frac{27}{2} = \frac{9}{2} \text{ uds}^2 = 4,5 \text{ uds}^2$$

$$3. \text{ a) } \begin{cases} -2x-2=y-3 \\ x+1=z \\ x-y-3z=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x-y=-1 \\ x-z=-1 \\ x-y-3z=-4 \end{cases}; \text{ usando el método de Gauss tenemos:}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{2f_2+f_1} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3-3f_2} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x-y=-1 \\ -y-2z=-3 \end{cases}$$

Llamando $z=\lambda$, es fácil deducir que $y=-2\lambda+3$, $x=\lambda-1$

$$\text{b) } \begin{cases} -x+y+z=0 \\ -x+2y+3z=4 \\ x-z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow AX=B \Rightarrow X=A^{-1}B$$

$$|A|=(2+3+0)-(2+1+0)=5-3=2; A^d = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A^d)^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$$

$$4. \quad ABX - I = 2X \Rightarrow ABX - 2X = I \Rightarrow (AB - 2I)X = I \Rightarrow X = (AB - 2I)^{-1}I \Rightarrow X = (AB - 2I)^{-1}$$

Si llamamos $C = AB - 2I$, entonces $X = C^{-1}$

$$C = AB - 2I = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|C|=(0-3+0)-(0-2+3)=-3-1=-4; C^d = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix};$$

$$C^{-1} = \frac{1}{|C|}(C^d)^t = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 & -1/2 & -3/4 \\ 1/4 & -1/2 & -3/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto } X = \begin{pmatrix} -3/4 & -1/2 & -3/4 \\ 1/4 & -1/2 & -3/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

5. Si en el determinante le restamos a la segunda fila la primera y a la tercera también la primera nos queda un determinante más sencillo. Luego desarrollamos por lo elementos de la tercera fila:

$$\begin{vmatrix} 2x-1 & 3x & x-2 \\ 2x+1 & x & 2x+1 \\ 2x-1 & 3x & 3x-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x-1 & 3x & x-2 \\ 2 & -2x & x+3 \\ 0 & 0 & 2x \end{vmatrix} = 2x \begin{vmatrix} 2x-1 & 3x \\ 2 & -2x \end{vmatrix} = 2x(-4x^2 + 2x - 6x) = \\ = 2x(-4x^2 - 4x) = -8x^2(x+1)$$

Por tanto, la ecuación inicial es equivalente a $-8x^2(x+1)=0$, cuyas soluciones son claramente $x=0$ y $x=-1$.

Hay muchas formas de hacer el determinante. Se pueden hacer ceros de formas muy diversas.