Ejercicio nº 1.- Realiza las siguientes operaciones y **simplifica** al máximo los resultados:

$$a)\ \frac{\left(-x^2\right)^5}{\left(x^2\right)^3\cdot\left(-x\right)^2}=\frac{-x^{10}}{x^6\cdot x^2}=\frac{-x^{10}}{x^8}=-x^2$$

$$b)\ \frac{1}{5}\sqrt{75}+\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{243}=\frac{1}{5}\sqrt{3\cdot 5^2}+\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{3^5}=\frac{5}{5}\sqrt{3}+\sqrt{3}-\frac{3^2}{2}\sqrt{3}=\sqrt{3}+\sqrt{3}-\frac{9}{2}\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-9\sqrt{3}}{2}=\frac{-5\sqrt{3}}{2}=\frac{-5}{2}\sqrt{3}$$

$$c)\ \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)}{\left(2-\sqrt{2}\right)\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)}=\frac{4+4\sqrt{2}+\sqrt{2^2}}{2^2-\sqrt{2^2}}=\frac{6+4\sqrt{2}}{4-2}=\frac{6+4\sqrt{2}}{2}=\frac{6}{2}+\frac{4}{2}\sqrt{3}=3+2\sqrt{2}$$

Ejercicio nº 2.- Resuelve las ecuaciones:

$$a)\quad 2\cdot(2x+1)^2-3\cdot(2x-1)^2+5\cdot(2x-1)\cdot(2x+1)=0\rightarrow 2\cdot\left(4x^2+1+4x\right)-3\cdot\left(4x^2+1-4x\right)+5\cdot(4x^2-1)=0$$

$$\rightarrow 8x^2+2+8x-12x^2-3+12x+20x^2-5=0\rightarrow 16x^2+20x-6=0\rightarrow 8x^2+10x-3=0\rightarrow$$

$$\rightarrow x=\frac{-10\pm\sqrt{10^2-4\cdot 8\cdot(-3)}}{2\cdot 8}=\frac{-10\pm\sqrt{196}}{16}=\frac{-10\pm 14}{16}=\begin{cases}x_1=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}\\[2mm] x_2=\dfrac{-24}{16}=\dfrac{-3}{2}\end{cases}$$

$$b)\quad x+\sqrt{7-3x}=-1\rightarrow\sqrt{7-3x}=-1-x\rightarrow\left(\sqrt{7-3x}\right)^2=\left(-1-x\right)^2\rightarrow 7-3x=\left(-1\right)^2+x^2-2\cdot\left(-1\right)\cdot x\rightarrow$$

$$\rightarrow 7-3x=1+x^2+2x\rightarrow 0=x^2+5x-6\rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1}=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{-5\pm 7}{2}=\begin{cases}x_1=\dfrac{2}{2}=1\\[2mm] x_2=\dfrac{-12}{2}=-6\end{cases}$$

Comprobación obligatoria:

$Si\ x=1\rightarrow 1+\sqrt{7-3\cdot 1}=-1\rightarrow 1+\sqrt{4}=-1\rightarrow 3\neq -1\rightarrow$ *Luego* $x=1$ *no es solución*

$Si\ x=-6\rightarrow -6+\sqrt{7-3\cdot(-6)}=-1\rightarrow -6+\sqrt{25}=-1\rightarrow -1=-1\rightarrow$ *Luego* $x=-6$ *es solución*

$c)\ 2x\cdot\left(5x-3\right)\cdot\left(1-x^2\right)=0\rightarrow$ *Igualamos a 0 cada factor y resolvemos*

$x=0$

$5x-3=0\rightarrow x=\dfrac{3}{5}$

$1-x^2=0\rightarrow 1=x^2\rightarrow x=\pm\sqrt{1}\rightarrow x=1, x=-1$

$$d)\ \frac{1}{x+3}-\frac{2}{x}=\frac{2-5x}{x^2+3x}\rightarrow\frac{x}{(x+3)x}-\frac{2(x+3)}{x(x+3)}=\frac{2-5x}{x^2+3x}\rightarrow\frac{x-2(x+3)}{x(x+3)}=\frac{2-5x}{x(x+3)}\rightarrow x-2x-6=2-5x\rightarrow$$

$\rightarrow x-2x+5x=2+6\rightarrow 4x=8\rightarrow x=2$ *Es solución puesto que no anula ningún denominador*

$e)\ 2x^3-3x^2-9x+10=0\rightarrow$ *Descomponemos en factores el polinomio, usamos el criterio de divisibilidad, el teorema del resto y el mètodo de Ruffini para dividir polinomios*

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -3 & -9 & 10\\ 1 & & 2 & -1 & -10\\ \hline & 2 & -1 & -10 & \boxed{0}\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{r|rrr} & 2 & -1 & -10\\ -2 & & -4 & 10\\ \hline & 2 & -5 & \boxed{0}\end{array}$$

$$(x-1)\cdot(x+2)\cdot(2x-5)=0 \rightarrow \textit{Igualamos a 0 cada factor y resolvemos}$$

$$x-1=0 \rightarrow x=1 \qquad x+2=0 \rightarrow x=-2 \qquad 2x-5=0 \rightarrow x=\frac{5}{2}$$

Ejercicio nº 3.- Resuelve el sistema de ecuaciones no lineal por el método que estimes más adecuado:

$$\begin{cases} x\cdot y=15 \rightarrow x=\dfrac{15}{y} \quad \textit{Por sustitución} \\ 4x^2-y^2=11 \rightarrow 4\cdot\left(\dfrac{15}{y}\right)^2-y^2=11 \rightarrow \dfrac{4\cdot 225}{y^2}-y^2=11 \rightarrow 900-y^4=11y^2 \rightarrow 0=y^4+11y^2-900 \end{cases}$$

Resolvemos la ecuación bicuadrada resultante mediante un cambio de variable $t=y^2$; $t^2=y^4$

$$t^2+11t-900=0 \rightarrow t=\frac{-11\pm\sqrt{11^2-4\cdot1\cdot(-900)}}{2\cdot1}=\frac{-11\pm61}{2}=\begin{cases} t=\dfrac{-11+61}{2}=\dfrac{50}{2}=25 \\ t=\dfrac{-11-61}{2}=\dfrac{-72}{2}=-36 \end{cases}$$

Ahora deshacemos el cambio y averiguamos la variable y

$si\ t=25 \rightarrow 25=y^2 \rightarrow y=\pm\sqrt{25} \rightarrow y=\pm5$

$si\ t=-36 \rightarrow -36=y^2 \rightarrow y=\pm\sqrt{-36} \rightarrow y=$ *no es un valor real*

Terminamos averiguando para cada y el valor de x correspondiente:

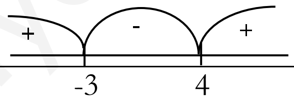
$si\ y=5 \rightarrow x=\dfrac{15}{5} \rightarrow x=3 \qquad si\ y=-5 \rightarrow x=\dfrac{15}{-5} \rightarrow x=-3$

El sistema tiene dos soluciones: $(x,y)=(3,5) \quad (x,y)=(-3,-5)$

Ejercicio nº 4.- Resuelve las inecuaciones, expresando las soluciones en forma de intervalo, si es posible:

$a)\quad x^2-2x-7>5-x \rightarrow x^2-x-12>0 \rightarrow$ *Estudiamos el signo del polinomio, buscamos las raíces del polinomio y lo descomponemos en factores:* $x^2-x-12=0 \rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4\cdot(-12)}}{2}=\dfrac{1\pm7}{2} \rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-3 \end{cases}$

$(x-4)\cdot(x+3)>0$



Solución: $(-\infty,-3)\cup(4,+\infty)$

$$b)\begin{cases} 2x+4>0 \rightarrow 2x>-4 \rightarrow x>-2 \\ -2x+7\geq\dfrac{x}{2}-3 \rightarrow -4x+14\geq x-6 \rightarrow -5x\geq-20 \rightarrow x\leq\dfrac{-20}{-5} \rightarrow x\leq4 \end{cases}$$

Luego la solución del sistema son todos los números mayores que -2 *y al mismo tiempo menores o iguales que* 4: $(-2,+\infty)\cap(-\infty,4]=(-2,4]$

Ejercicio nº 5.- Un comerciante compra dos bicicletas por 3950 € y las vende por 4222 €. Averigua cuánto pagó por cada una si en la venta de la primera ganó un 20% y en la de la segunda perdió un 8%.

Llamamos $x=$ *precio que pagó por la bici* 1 $\qquad y=$ *precio que pagó por la bici* 2

$$\begin{cases} x+y=3950 \\ 1'20x+0'92y=4222 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=3950-y \quad \textit{sustituimos} \\ 1'20(3950-y)+0'92y=4222 \rightarrow \textit{resolvemos}\ y=1850;\ x=2100 \end{cases}$$

Solución: *Pagó* 2100 € *por la bici* 1 *y* 1850 € *por la bici* 2

Ejercicio nº 6.- Un grupo de amigos alquila una furgoneta por 490 € para hacer un viaje. A última hora se apuntan dos más y así se devuelven 28 € a cada uno de los otros. ¿Cuántos fueron de excursión y cuánto pagó cada uno?

Llamamos $x =$ *número de amigos que se iban de viaje* $\quad$ $y =$ *precio que pagaba cada uno*

$$\begin{cases} x \cdot y = 490 \\ (x+2)\cdot(y-28) = 490 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{490}{y} \quad \text{sustituimos} \\ \left(\dfrac{490}{y}+2\right)\cdot(y-28) = 490 \rightarrow \text{resolvemos } 490 - \dfrac{13720}{y} + 2y - 56 = 490 \rightarrow \end{cases}$$

$$\rightarrow -13720 + 2y^2 - 56y = 0 \rightarrow 2y^2 - 56y - 13720 = 0 \rightarrow y = \frac{56 \pm \sqrt{3136+109760}}{4} = \frac{56 \pm 336}{4} = \begin{cases} y = 98 \\ y = -70 \text{ no vale} \end{cases}$$

$$\text{si } y = 98 \rightarrow x = \frac{490}{98} = 5 \qquad \text{Solución: Fueron 7 amigos de viaje y cada uno pagó } 70\,€$$

Ejercicio nº 7.- Halla las dimensiones de un rectángulo cuya diagonal mide 13 m, y su área, 60 m².

Llamamos $x =$ *un lado del rectángulo* $\quad$ $y =$ *el otro lado*

$$\begin{cases} x \cdot y = 60 \\ x^2 + y^2 = 13^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{60}{y} \quad \text{sustituimos} \\ \left(\dfrac{60}{y}\right)^2 + y^2 = 169 \rightarrow \text{resolvemos } \dfrac{3600}{y^2} + y^2 = 169 \rightarrow 3600 + y^4 = 169y^2 \rightarrow y^4 - 169y^2 + 3600 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Aplicamos un cambio de variable} \rightarrow z = y^2 \rightarrow z^2 - 169z + 3600 = 0 \rightarrow z = \frac{169 \pm \sqrt{169^2 - 14400}}{2} = \frac{169 \pm 119}{2} =$$

$$\rightarrow \begin{cases} z = 144 \\ z = 25 \end{cases}$$

$$\text{si } z = 144 \rightarrow \begin{cases} y = 12 \\ y = -12 \text{ no válida} \end{cases} \rightarrow \text{si } y = 12 \rightarrow x = 5$$

$$\text{si } z = 25 \rightarrow \begin{cases} y = 5 \\ y = -5 \text{ no válida} \end{cases} \rightarrow \text{si } y = 5 \rightarrow x = 12$$

Solución: *Las dimensiones del rectángulo son* $12\ m$ *y* $5\ m$