Puntos, rectas y planos en el espacio. Problemas métricos en el espacio

1. Estudiar la posición relativa de las rectas r y s: $r \equiv \begin{cases} x+3y+4z-6=0 \\ 2x+y-3z+2=0 \end{cases}$; $s \equiv \begin{cases} 2t-1 \\ y=t+1 \\ z=-3t+2 \end{cases}$

   Calcular la distancia entre ambas rectas

junio 1997

Solución

Obtengamos un vector director $\vec{u}$ y un punto A de r. Llamemos $z=\lambda$. Entonces el sistema queda de la forma: $\begin{cases} x+3y=-4\lambda+6 \\ 2x+y=3\lambda-2 \end{cases}$. Multiplicando la primera ecuación por 2 y restando queda

$$5y=-11\lambda+14 \Rightarrow y=\frac{-11}{5}\lambda+\frac{14}{5}$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$x+3\left(\frac{-11}{5}\lambda+\frac{14}{5}\right)=-4\lambda+6 \Rightarrow x-\frac{33}{5}\lambda+\frac{42}{5}=-4\lambda+6 \Rightarrow x=\frac{13}{5}\lambda-\frac{12}{5}$$

Por tanto, la recta es, en ecuaciones paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x=\frac{13}{5}\lambda-\frac{12}{5} \\ y=\frac{-11}{5}\lambda+\frac{14}{5} \\ z=\lambda \end{cases}$

Así, un punto de r es $A\left(-\frac{12}{5},\frac{14}{5},0\right)$ y un vector director de r es $\vec{u}=(13,-11,5)$. Por otro lado, es claro que un punto de s es $B(-1,1,2)$ y un vector director de s es $\vec{v}=(2,1,-3)$. Entonces:

- $\text{rango}\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix}$ $\text{rango}\begin{pmatrix} 13 & -11 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}=2$. pues hay al menos un menor de orden dos distinto de cero.

- $\text{rango}\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \overrightarrow{AB} \end{pmatrix}=\text{rango}\begin{pmatrix} 13 & -11 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \\ \frac{7}{5} & \frac{-9}{5} & 2 \end{pmatrix}=3$, ya que $\begin{vmatrix} 13 & -11 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \\ 7/5 & -9/5 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Por tanto, r y s se cruzan.

Hallemos el plano π que pasa por r y es paralelo a s. Para ello escribamos la ecuación del haz de planos de arista r: $\lambda(x+3y+4z-6)+\mu(2x+y-3z+2)=0 \Leftrightarrow (\lambda+2\mu)x+(3\lambda+\mu)y+(4\lambda-3\mu)z+(-6\lambda+2\mu)=0$

Para que un plano de este haz sea paralelo a la recta s se debe cumplir que el vector perpendicular al plano $(\lambda+2\mu,3\lambda+\mu,4\lambda-3\mu)$ sea perpendicular al vector director de s: $\vec{v}=(2,1,-3)$, es decir, que el producto escalar de ambos sea cero: $(\lambda+2\mu)\cdot 2+(3\lambda+\mu)\cdot 1+(4\lambda-3\mu)\cdot(-3)=0 \Rightarrow -7\lambda+14\mu=0$.

Para que esta última igualdad se cumpla basta elegir $\lambda = 2$, $\mu = 1$, luego el plano π es $4x - 7y + 5z - 10 = 0$. La distancia buscada coincide por tanto con la distancia del punto $B(-1,1,2)$ de *s* al plano π:

$$d(r,s) = d(B,\pi) = \frac{|(-1)\cdot 4 + 1\cdot(-7) + 2\cdot 5 + (-10)|}{\sqrt{4^2 + (-7)^2 + 5^2}} = \frac{11}{\sqrt{90}} = \frac{11}{3\sqrt{10}} = \frac{11\sqrt{10}}{30} \text{ uds.}$$ †

---

2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $A(1,2,-1)$, es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} 3y + z = 7 \\ x + 4y + z = 8 \end{cases}$ y paralela al plano $2x + y - z = 3$.

junio 1997

Solución

Llamemos $\vec{u} = (a,b,c)$ a un vector director de la recta *s* que buscamos. Hallemos un vector director $\vec{v}$ de la recta *r*. Para ello llamemos, por ejemplo, $y = \lambda$. Entonces $z = 7 - 3\lambda$, $x + 4\lambda + 7 - 3\lambda = 8 \Rightarrow x = 1 - \lambda$. Por tanto, las ecuaciones paramétricas de *r* son: $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 7 - 3\lambda \end{cases}$, y de aquí, un vector director de *r* es $\vec{v} = (-1,1,-3)$.

Como $s \perp r \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow -a + b - 3c = 0$ **(1)**.

Un vector perpendicular al plano $\pi \equiv 2x + y - z = 3$ es $\vec{w} = (2,1,\ \ 1)$. Como $s \,||\, \pi$, entonces $\vec{u} \perp \vec{w}$, con lo que $\vec{u}\cdot\vec{w} = 0$, es decir, $2a + b - c = 0$ **(2)**.

Resolvamos el sistema formado por las ecuaciones **(1)** y **(2)**. Para ello llamemos, por ejemplo, $c = t$, con lo que $\begin{cases} -a + b = 3t \\ 2a + b = t \end{cases}$. Restando ambas ecuaciones: $-3a = 2t \Rightarrow a = -\frac{2}{3}t$ y, sustituyendo en la primera: $\frac{2}{3}t + b = 3t \Rightarrow b = \frac{7}{3}t$. Para $t = 3$ se obtiene $a = -2$, $b = 7$, y $c = 3$; con lo que un vector director de *s* es $\vec{u} = (-2,7,3)$ y la recta *s* es, en ecuaciones paramétricas: $s \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 2 + \ \lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$. †

---

3. Posición relativa de la recta $\frac{x-3}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-1}$, y el plano $x - 3y - z + 6 = 0$. Calcular la distancia entre la recta y el plano.

septiembre 1997

Solución

Tomemos un punto y un vector director de la recta *r*: $P(a_1, a_2, a_3) = P(3,1,-2)$; $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) = (5,2,-1)$. Los coeficientes *A*, *B*, *C* del plano π son $A = 1$, $B = -3$, y $C = -1$, con lo que $(A,B,C) = (1,-3,-1)$ es un vector perpendicular al plano π. Entonces:

$Au_1 + Bu_2 + Cu_3 = 1\cdot 5 + (-3)\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) = 5 - 6 + 1 = 0 \Rightarrow (A,B,C) \perp \vec{u}$.

$Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D = 1\cdot 3 + (-3)\cdot 1 + (-1)\cdot(-2) + 6 = 3 - 3 + 2 + 6 = 8 \neq 0 \Rightarrow P \notin \pi$.

Por tanto, la recta y el plano son paralelos: $r \parallel \pi$.

La distancia entre la recta r y el plano π es la distancia de un punto cualquiera de la recta r al plano π:

$$d(r,\pi)=d(P,\pi)=\frac{|1\cdot 3+(-3)\cdot 1+(-1)\cdot(-2)+6|}{\sqrt{1^2+(-3)^2+(-1)^2}}=\frac{8}{\sqrt{11}}=\frac{8\sqrt{11}}{11}\text{ uds.}$$ †

---

4. Ecuación de la recta que pasa por $A(2,-1,3)$ y es perpendicular al plano que pasa por los puntos $B(1,1,0)$, $C(0,-1,2)$ y $D(-2,2,1)$. Calcula el volumen del tetraedro *ABCD*.

septiembre 1997

Solución

La ecuación del plano que pasa por los puntos *B*, *C* y *D* es: $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$. Restando a la primera, segunda y tercera filas la cuarta: $\begin{vmatrix} x+2 & y-2 & z-1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$. Desarrollando por la 4ª columna se tiene:

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-2 & z-1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (-x-2-2y+4-9z+9)-(-2z+2+3y-6+3x+6)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-x-2y-9z+11)-(3x+3y-2z+2)=0 \Leftrightarrow -4x-5y-7y+9=0.$$

La recta r que buscamos tendrá como vector director un vector perpendicular al plano: $\vec{u}=(4,5,7)$.

Entonces las ecuaciones paramétricas de la recta son: $r\equiv\begin{cases} x=2+4\lambda \\ y=-1+5\lambda \\ z=3+7\lambda \end{cases}$

El volumen del tetraedro es:

$$V=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 1-2 & 1-(-1) & 0-3 \\ 0-2 & -1-(-1) & 2-3 \\ -2-2 & 2-(-1) & 1-3 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \\ -4 & 3 & -2 \end{vmatrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{6}\left|(0+8+18)-(0+8+3)\right|=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}\text{ uds}^3.$$ †

---

5. Estudiar la posición relativa de las rectas:

$$r:\begin{cases} x=-7+\ t \\ y=\ -t \\ z=2 \end{cases} \quad ; \quad s:\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{-3}=\frac{z}{-2}$$

Hallar la ecuación de un plano que contenga a ambas rectas.

junio 1998

Solución

Un punto de *r* es $A(-7,1,2)$ y un vector director es $\vec{u}=(4,-1,0)$. Un punto de *s* es $B(3,-4,0)$ y un vector director de *s* es $\vec{v}=(2,-3,-2)$.

- $\text{rango}\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{v}\end{pmatrix}$ $\quad\text{rango}\begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\ 2 & -3 & -2\end{pmatrix}=2$. pues hay al menos un menor de orden dos distinto de cero.

- $\text{rango}\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{v}\\ \overrightarrow{AB}\end{pmatrix}=\text{rango}\begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\ 2 & -3 & -2\\ 10 & -5 & -2\end{pmatrix}=2$, ya que $\begin{vmatrix}4 & -1 & 0\\ 2 & -3 & -2\\ 10 & -5 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & -1 & 0\\ -8 & 2 & 0\\ 10 & -5 & -2\end{vmatrix}=$

$$=(-2)\begin{vmatrix}4 & -1\\ -8 & 2\end{vmatrix}=(-2)(8-8)=0.$$

Entonces las rectas son secantes. Hallemos el punto *P* donde se cortan ambas:

$$r\equiv\begin{cases} \;=-7+4t\\ y=1-t\\ z=2\end{cases}\Rightarrow r\equiv\frac{x+7}{4}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{0}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}-x-7=4y-4\\ 0=-z+2\end{cases}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x+4y=-3\\ z=2\end{cases}$$

$$s\equiv\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{-3}=\frac{z}{-2}\Rightarrow s\equiv\begin{cases}-3x+9=2y+8\\ -2y-8=-3z\end{cases}\Rightarrow s\equiv\begin{cases}3x+2y=1\\ 2y-3z=-8\end{cases}$$

Uniendo todas las ecuaciones se obtiene $z=2$, $y=-1$, $x=1$. Por tanto, el punto *P* donde se cortan ambas rectas es $P(1,-1,2)$.

El plano π que contiene a *r* y a *s*, contiene a *P* y tiene por direcciones las de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Entonces: $\begin{vmatrix}x-1 & y+1 & z-2\\ 4 & -1 & 0\\ 2 & -3 & -2\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(2x-2-12z+24)-(-2z+4-8y-8)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow(2x-12z+22)-(-8y-2z-4)=0\Leftrightarrow 2x+8y-10z+26=0\Leftrightarrow x+4y-5z+13=0$$

Por tanto $\pi\equiv x+4y-5z+13=0$. †

---

6. Hallar el ángulo que forman la recta $r:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{1}$ y el plano $x+2y-z-3=0$. Obtener el punto de corte de la recta y el plano

junio 1998

Solución

Un vector director de la recta es $\vec{v}=(2,1,1)$ y un vector perpendicular al plano es $\vec{u}=(1,2,-1)$. El ángulo entre una recta y un plano viene dado por la fórmula:

$\text{sen}\,\alpha=\dfrac{|Av_1+Bv_2+Cv_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}$, donde (A,B,C) es un vector perpendicular al plano y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ es un vector director de la recta. Entonces, en nuestro caso:

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{|1\cdot 2+2\cdot 1+(-1)\cdot 1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=30^{\circ}.$$

$$r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{1}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x-1=2y-4\\ y-2=z+1\end{cases}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x-2y=-3\\ y-z=3\end{cases}.$$

Uniendo las ecuaciones implícitas de la recta con la ecuación del plano obtenemos el sistema:

$$\begin{cases}-2y=-3\\ -z=3\\ x+2y-z=3\end{cases}$$

El determinante de la matriz de los coeficientes es: $\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=(-1+2)-(-2)=3$. Las soluciones del sistema son, por tanto:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-3 & -2 & 0\\ 3 & 1 & -1\\ 3 & 2 & -1\end{vmatrix}}{3}=\frac{3\begin{vmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}}{3}=\begin{vmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-1.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & -3 & 0\\ 0 & 3 & -1\\ 1 & 3 & -1\end{vmatrix}}{3}=\frac{3\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}}{3}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}}{3}=\frac{3\begin{vmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}}{3}=\begin{vmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=-2.$$

Entonces el punto de corte de la recta y el plano es $(-1,1,-2)$. †

---

7. Estudiar si las rectas r y s son coplanarias. En caso afirmativo, dar la ecuación del plano que las contiene:

$$r\equiv\begin{cases}2x-3y+13=0\\ 2y-z-4=0\end{cases}\quad;\quad s\equiv\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{4}$$

septiembre 1998

Solución

Hallemos un vector director $\vec{u}$ y un punto A de r. Para ello pasemos a paramétricas. Llamemos, por ejemplo, $y=\lambda$. Entonces, $2\lambda-z-4=0\Rightarrow z=2\lambda-4$; $2x-3\lambda+13=0\Rightarrow 2x=3\lambda-13\Rightarrow x=\frac{3}{2}\lambda-\frac{13}{2}$. Por tanto, las ecuaciones paramétricas de r son $r \equiv \begin{cases} x = \frac{3}{2}\lambda - \frac{13}{2} \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda - 4 \end{cases}$, con lo que un punto de r es $A(-5,1,-2)$ (haciendo λ 1) y un vector director de r es $\vec{u} = (3,2,4)$.

Un vector director de s es $\vec{v} = (3,2,4)$ y un punto de s es $B(1,-2,1)$.

Entonces:

- $\text{rango}\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} \quad \text{rango}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 1$, pues las dos filas son iguales.
- $\text{rango}\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \overrightarrow{AB} \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} = 2$, pues hay al menos un menor de orden dos distinto de cero.

Esto quiere decir que r y s son paralelas: $r \parallel s$ y, por tanto, coplanarias. Para hallar el plano π que las contiene tomamos un punto cualquiera de una de las dos rectas, por ejemplo, $A(-5,1,-2)$; la dirección de r: $\vec{u} = (3,2,4)$ y la otra dirección, la del vector $\vec{w}$ que une A con B: $\overrightarrow{AB} = (6,-3,3)$. Podemos tomar pues $\vec{w} = (2,-1,1)$. Así pues:

$$\begin{vmatrix} x+5 & y-1 & z+2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2x+10+8y-8-3z-6)-(4z+8+3y-3-4x-20) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x+8y-3z-4)-(-4x+3y+4z-15) = 0 \Leftrightarrow 6x+5y-7z+11 = 0 .$$

Por tanto, el plano π que contiene a r y s es $\pi \equiv 6x+5y-7z+11 = 0$. †

---

8. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3,-4,7)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv 2x-3y+z-11 = 0$. Hallar el punto simétrico de P respecto del plano π.

septiembre 1998

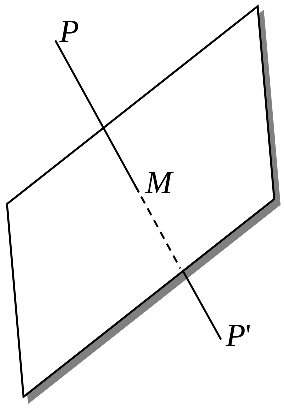
Solución

La recta r que buscamos tendrá como vector director un vector perpendicular al plano π: $\vec{u} = (2,-3,1)$. Las ecuaciones de r serán:

$$r \equiv \begin{cases} x = 3+2\lambda \\ y = -4-3\lambda \\ z = 7+\lambda \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z-7}{1} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} -3x+9 = 2y+8 \\ y+4 = -3z+21 \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} 3x+2y = 1 \\ y+3z = 17 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema formado por la recta y el plano obtenemos el punto M donde la recta corta al plano:

$$\begin{cases} 3 \quad +2y=1 \\ y+3z=17 \\ 2x-3y+z=11 \end{cases}$$



El determinante de la matriz de los coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (3+12)-(-27)=42 .$$

Por tanto:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 17 & 1 & 3 \\ 11 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{42}=\frac{(1+66)-(34-9)}{42}=\frac{42}{42}=1; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 17 & 3 \\ 2 & 11 & 1 \end{vmatrix}}{42}=\frac{(51+6)\quad(99)}{42}=\frac{-42}{42}=-1;$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 17 \\ 2 & -3 & 11 \end{vmatrix}}{42}=\frac{(33+68)-(2-153)}{42}=\frac{252}{42}=6$$

Así, el punto M donde la recta r corta al plano π es $M(1,-1,6)$. Este punto es el punto medio del simétrico $P'(a,b,c)$ de $P(3,-4,7)$ respecto del plano π.

Entonces: $(1,-1,6)=\left(\frac{a+3}{2},\frac{b-4}{2},\frac{c+7}{2}\right) \Rightarrow a=-1,\ b=2,\ c=5$.

Por tanto, el simétrico del punto P respecto del plano π es $P'(-1,2,5)$. †

---

9. Hallar la ecuación de la proyección ortogonal r' de la recta $r \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{2}$ sobre el plano $\alpha \equiv x-3y+2z+12=0$.

junio 1999

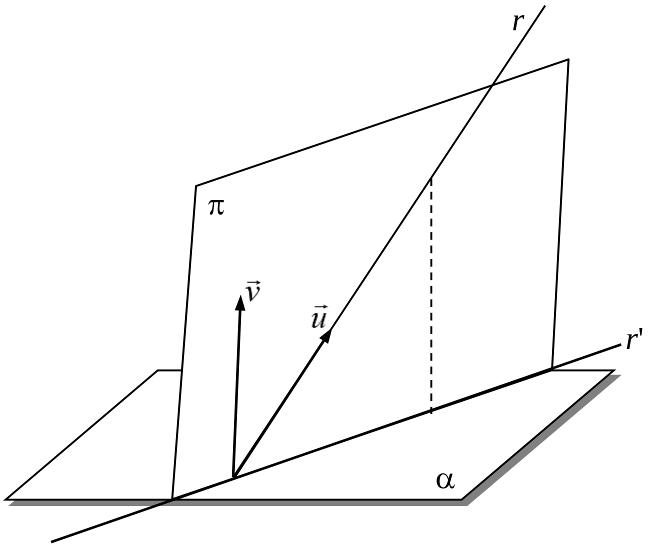
Solución

Hallemos el plano π, perpendicular al plano α que contiene a la recta r. Esta condición nos lleva a que un punto de π será $A(1,1,2)$ (punto de la recta) y dos direcciones del mismo serán $\vec{u}=(2,1,2)$ (la de la recta, por contenerla) y $\vec{v}=(1,-3,2)$ (la de un vector perpendicular a α). Entonces:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (2x-2+2y-2-6z+12)-(z-2+4y-4-6x+6)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x+2y-6z+8)-(-6x+4y+z)=0 \Leftrightarrow 8x-2y-7z+8=0 .$$

Por tanto, el plano π es $\pi \equiv 8x-2y-7z+8=0$.



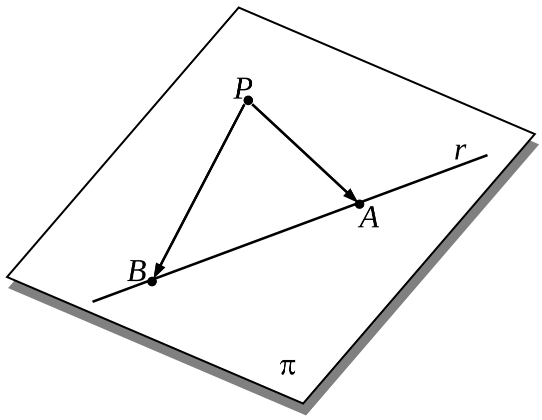
La proyección ortogonal r' de la recta r sobre el plano α será el corte o intersección de α con el plano hallado π. Por tanto, r' tiene ecuaciones implícitas: $r' \equiv \begin{cases} 8x-2y-7z+8=0 \\ x-3y+2x+12=0 \end{cases}$. †

---

10. Dados el punto $P(2,1,2)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} \;\; = 2+t \\ y = 3-t \\ \;\; 4-3t \end{cases}$ determinar la ecuación del plano que contiene a ambos.

junio 1999

Solución



Dos puntos de la recta r son: $A(2,3,4)$ (para $t=0$) y $B(3,2,1)$ (para $t=1$). Por tanto, el plano π que se busca debe pasar por el punto $P(2,1,2)$ y tener las direcciones de $\overrightarrow{PA}=(0,2,2)$) y $\overrightarrow{PB}=(1,1,-1)$.

Así pues: $\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-2x+4+2y-2)-(2z-4+2x-4)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4x+2y-2z+10=0 \Leftrightarrow 2x-y+z-5=0$, y el plano es π ≡ 2x − y + z − 5 = 0 †

---

11. Dadas las rectas $r: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{1}$ y $\equiv \begin{cases} x=\mu \\ y=-\mu \\ z=-\mu \end{cases}$, hallar los puntos que dan la mínima distancia y determinar la ecuación de la perpendicular común a ambas rectas.

septiembre 1999

Solución:

Escribamos las ecuaciones implícitas de las rectas *r* y *s*:

$$r \equiv \frac{x \quad 3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} x-3=2y \\ y=z-1 \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} x-2y-3=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x=\mu \\ y=-\mu \\ z=-\mu \end{cases} \Leftrightarrow s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1} \Leftrightarrow s \equiv \begin{cases} -x=y \\ -y=-z \end{cases} \Leftrightarrow s \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ y-z=0 \end{cases}$$

- Hallemos el plano π que pasa por *s* y es paralelo a *r*. Escribamos para ello la ecuación del haz de planos de arista *s*:

  $$\lambda(x+y)+\mu(y-z)=0 \Leftrightarrow \lambda x+(\lambda+\mu)y-\mu z=0$$

  Para que un plano de este haz sea paralelo a la recta *r* se debe cumplir que el vector perpendicular al plano $(\lambda,\lambda+\mu,-\mu)$ sea perpendicular a un vector director de *r*, $\vec{u}=(2,1,1)$, es decir, que el producto escalar de ambos sea cero:

  $$2\lambda+\lambda+\mu-\mu=0 \Rightarrow 3\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0$$

  Tomando pues $\lambda=0$ y un valor cualquiera de $\mu\neq 0$ ($\mu=1$), se tiene: $\pi \equiv y-z=0$.

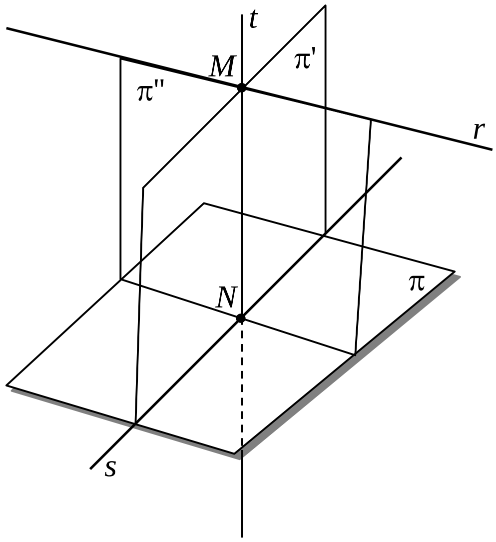
- Hallemos ahora el plano π' que pasa por *s* y es perpendicular a π. Ya sabemos que el haz de planos de arista *s* es $\lambda x+(\lambda+\mu)y-\mu z=0$.

  Para que un plano de este haz sea perpendicular a π se debe cumplir que los vectores perpendiculares a ambos planos sean perpendiculares, es decir, que el producto escalar de los vectores $(\lambda,\lambda+\mu,-\mu)$ y $(0,1,-1)$ sea 0:

  $$\lambda+\mu+\mu=0 \Rightarrow \lambda+2\mu=0$$

  Tomando $\lambda=-2$, $\mu=1$, se tiene que

  $$\pi' \equiv -2x-y-z=0 \Leftrightarrow \pi' \equiv 2x+y+z=0$$



- Hallemos por último el plano π'' que pasa por *r* y es perpendicular a π. El haz de planos de arista *r* es

  $$\lambda(x-2y-3)+\mu(y-z+1)=0 \Leftrightarrow$$
  $$\Leftrightarrow \lambda x+(-2\lambda+\mu)y-\mu z-3\lambda+\mu=0$$

  Para que un plano de este haz sea perpendicular a π se debe cumplir (al igual que en el punto anterior) que los vectores $(\lambda,-2\lambda+\mu,-\mu)$ y $(0,1,-1)$ sean perpendiculares, es decir que:

  $$-2\lambda+\mu+\mu=0 \Leftrightarrow -2\lambda+2\mu=0 \Leftrightarrow \lambda-\mu=0$$

  Tomando $\lambda=\mu=1$, se tiene que $\pi'' \equiv x-y-z-2=0$.

La recta *t*, perpendicular común a *r* y *s*, es la intersección de π' y π'', luego tiene ecuaciones implícitas

$$t \equiv \begin{cases} 2x+y+z= \\ x-y-z-2=0 \end{cases}$$

La recta *t* corta a *r* en un punto *M*: $t \cap r = M$. Resolvamos pues el sistema formado por t y r:

$$\begin{cases} x-2y-3=0 \\ y-z+1=0 \\ 2x+y+z=0 \\ x-y-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=3 \\ y-z=-1 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$$

Observa que hemos eliminado la última ecuación (sabemos que tiene solución única) y hemos pasado los términos independientes al segundo miembro. De la primera ecuación: $x=3+2y$. Sustituyendo en la tercera: $2(3+2y)+y+z=0 \Rightarrow 5y+z=-6$. Por tanto, nos queda el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: $\begin{cases} -z=-1 \\ 5y+z=-6 \end{cases}$, cuyas soluciones son: $y=-\frac{7}{6}$, $z=-\frac{1}{6}$ y sustituyendo en la expresión de x se tiene $x=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. Así pues $M=\left(\frac{2}{3},-\frac{7}{6},-\frac{1}{6}\right)$.

De una manera completamente análoga se obtiene el punto *N*: $t \cap s = N$. El sistema formado por *t* y *s* es:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y-z=0 \\ 2x+y+z=0 \\ x-y-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ y-z=0 \\ x-y-z=2 \end{cases} \Rightarrow [x=-y] \Rightarrow \begin{cases} y-z=0 \\ -2y-z=2 \end{cases}$$

De aquí se obtiene $x=\frac{2}{3}$, $y=-\frac{2}{3}$, $z=-\frac{2}{3}$. Entonces $N=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

Observa que en este caso hemos suprimido la tercera ecuación, pues si suprimimos la cuarta queda un sistema con infinitas soluciones y esto no es posible ya que sabemos que la solución es única (es conveniente hacer también estas comprobaciones utilizando el teorema de Rouché).

Estos puntos $M=\left(\frac{2}{3},-\frac{7}{6},-\frac{1}{6}\right)$ y $N=\left(\frac{2}{3},-\frac{}{3},-\frac{}{3}\right)$, son los que dan la mínima distancia entre *r* y *s*:

$$d(r,\,s)=d(M,\,N)=\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}-\left(-\frac{7}{6}\right)\right)^2+\left(-\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{6}\right)\right)^2}=$$

$$=\sqrt{0^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{ uds}. \dagger$$

---

12. Hallar la distancia del punto $P(1,2,3)$ a la recta *r* de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} x=t \\ y=6-t \\ z=2+t \end{cases}$, determinando el punto de la recta que dista menos de *P*.

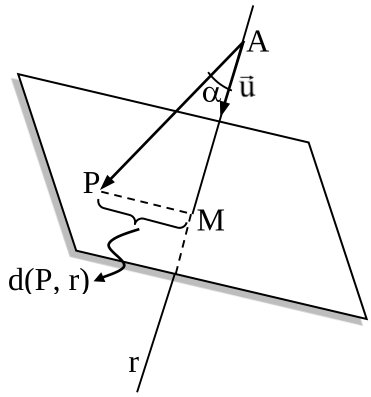
septiembre 1999

Solución

El punto *M* de *r* que dista menos de *P*, es la intersección de *r* con el plano π que pasa por *P* y es perpendicular a *r*. Un vector director de *r* es $\vec{u}=(1,-1,1)$. Por tanto, este mismo será un vector perpendicular a π. Así pues π ha de ser de la forma $x-y+z+D=0$. Como este plano pasa por *P*, entonces

$$1-2+3+D=0 \Rightarrow D=-2 \Rightarrow \pi \equiv x-y+z-2=0$$

Las ecuaciones implícitas de la recta r son:



$$r \equiv \begin{cases} x=t \\ y=6-t \\ z=2+t \end{cases} \Rightarrow r \equiv \frac{x}{1}=\frac{y \quad 6}{-1}=\frac{z-2}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} -x=y-6 \\ y-6=-z+2 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x+y=6 \\ y+z=8 \end{cases}$$

Como $r \cap \pi = M$, al resolver el sistema formado por r y π obtenemos el punto *M*.

$$\begin{cases} x+y=6 \\ y+z=8 \\ x-y+z-2=0 \end{cases}$$

De la primera ecuación $x=6-y$. Sustituyendo en la tercera tenemos: $6-y-y+z-2=0$, de donde $6-y-y+z-2=0 \Rightarrow -2y+z=-4$, quedando el sistema $\begin{cases} \mathrm{y+z=8} \\ \mathrm{-2y+z=-4} \end{cases}$, con lo que $y=4$, $z=4$.

Sustituyendo en la expresión de *x*, se tiene $x=2$. Por tanto, el punto *M* de *r* que dista menos de *P* es $M(2,4,4)$ y la distancia de *P* a *r*, será la misma que la de *P* a *M*:

$$d(P,\, r)=d(P,\, M)=\left|\overrightarrow{PM}\right|=\sqrt{(2-1)^2+(4-2)^2+(4-3)^2}=\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\sqrt{6}\ \text{uds}$$

También se puede hallar la distancia de *P* a *r* utilizando la fórmula:

$$d(P,\, r)=\frac{\left|(p_1-a_1,\, p_2-a_2,\, p_3-a_3)\times(u_1,u_2,u_3)\right|}{\sqrt{u_1{}^2+u_2{}^2+u_3{}^2}}$$

donde $P(p_1,p_2,p_3)=P(1,2,3)$, $A(a_1,a_2,a_3)$ es un punto de la recta: $A(0,6,2)$ y $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ es un vector director de la recta $\vec{u}=(1,-1,1)$.

Entonces:

$$(p_1-a_1,\ p_2-a_2,\ p_3-a_3)=(1-0,\ 2-6,\ 3-2)=(1,\ -4,\ 1)$$

El producto vectorial será:

$$(p_1-a_1,\ p_2-a_2,\ p_3-a_3)\times(u_1,\ u_2,\ u_3)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix} i & k \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-3(i-k)=-3i+3k$$

(donde se le ha restado a la tercera fila la segunda y luego se ha desarrollado el determinante por los elementos de la tercera fila). Entonces tenemos $(p_1-a_1,p_2-a_2,p_3-a_3)\times(u_1,u_2,u_3)=(-3,0,3)$. Por tanto:

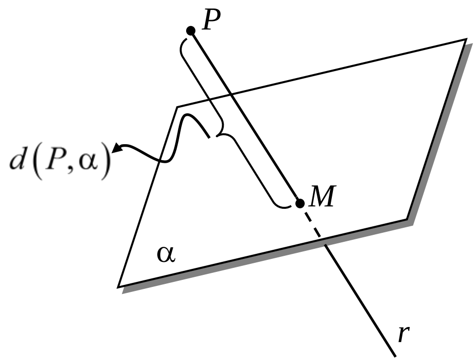
$$d(P,r)=\frac{\left|(-3,\ 0,\ -3)\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{\sqrt{9+0+9}}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{6}}{3}=\sqrt{6}\ \text{uds}\ \dagger$$

13. Hallar la distancia del punto $P(2,4,1)$ al plano $\alpha \equiv 3x+4y+12z-8=0$, y encontrar el punto del plano que da la mínima distancia del punto *P*.

junio 2000

Solución

Hallemos la recta *r* que es perpendicular al plano α y que pasa por $P(2,4,1)$. Un vector director de esta recta será un vector perpendicular al plano α, o sea el vector $\vec{u}=(3,4,12)$. Por tanto, la recta *r* será: $r \equiv \begin{cases} \quad 2+3t \\ y=4+4t \\ z \quad 1+12t \end{cases} \Rightarrow r \equiv \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-4}{4}=\dfrac{z-1}{12} \Rightarrow$



$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} 4x-8=3y-12 \\ 12y-48=4z-4 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} 4x-3y=-4 \\ 12y-4z=44 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} 4x-3y=-4 \\ 3y-z=11 \end{cases}$$

Esta recta corta al plano α en un punto *M*, que da la mínima distancia del punto *P* al plano α: $r \cap \alpha = M$.

Para hallar el punto *M* se resuelve el sistema formado por la recta *r* y el plano α: $\begin{cases} 4x-3y=-4 \\ 3y-z=11 \\ 3x+4y+12z-8=0 \end{cases}$. De la segunda ecuación $z=3y-11$. Sustituyendo en la tercera $3x+4y+12(3y-11)-8=0 \Rightarrow 3x+40y=140$, que junto con la primera ecuación forman el sistema: $\begin{cases} 4x-3 \quad =-4 \\ 3x+40y=140 \end{cases}$, cuyas soluciones son $x=\dfrac{20}{13}$, $y=\dfrac{44}{13}$. Sustituyendo en la expresión de *z* nos da $z=-\dfrac{11}{13}$. De este modo el punto *M* es $M\left(\dfrac{20}{13},\dfrac{44}{13},-\dfrac{11}{13}\right)$.

La distancia del punto *P* al plano α coincidirá por tanto con la distancia de *P* a *M*:

$$d(P,\alpha)=d(P,M)=\left|\overrightarrow{PM}\right|=\sqrt{\left(\frac{20}{13}-2\right)^2+\left(\frac{44}{13}-4\right)^2+\left(-\frac{11}{13}-1\right)^2}=$$

$$\sqrt{\left(\frac{-6}{13}\right)^2+\left(\frac{-8}{13}\right)^2+\left(\frac{-24}{13}\right)^2}=\sqrt{\frac{36}{169}+\frac{64}{169}+\frac{576}{169}}=\sqrt{\frac{676}{169}}=\sqrt{4}=2\,\text{uds}$$

La distancia del punto *P* al plano α también se puede hallar utilizando la fórmula:

$$d(P,\alpha)=\frac{|Ap_1+Bp_2+Cp_3+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

donde $P(p_1,p_2,p_3)=P(2,4,1)$ y como α es el plano: $\alpha \equiv 3x+4y+12z-8=0$, entonces $A=3$, $B=4$, $C=12$, $D=-8$. De este modo:

$$d(P,\alpha)=\frac{|3\cdot 2+4\cdot 4+12\cdot 1+(-8)|}{\sqrt{3^2+4^2+12^2}}=\frac{26}{\sqrt{169}}=\frac{26}{13}=2\,\text{uds} \quad \dagger$$

14. Hallar el punto simétrico del punto $A(1,2,3)$ respecto de la recta $r \equiv \begin{cases} x-y+1=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases}$

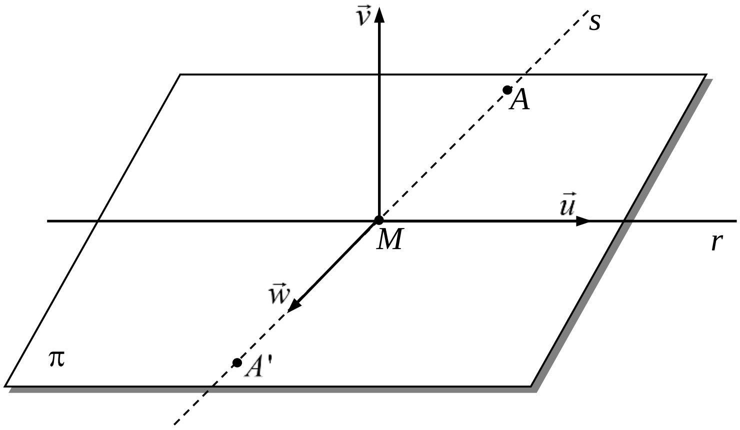
junio 2000

Solución

Hallemos el plano π que contiene al punto *A* y a la recta *r*.

El haz de planos de base la recta r es $\lambda(x-y+1)+\mu(2x-z-1)=0$. Podemos suponer que $\lambda \neq 0$ y dividir todos los términos entre λ con lo que la ecuación del haz queda de la forma: $x-y+1+t(2x-z-1)=0$, donde $t=\mu/\lambda$. Como el plano contiene al punto *A*, entonces $1-2+1+t(2-3-1)=0 \Rightarrow -2t=0 \Rightarrow t=0$ y el plano π que buscamos es $\pi \equiv x-y+1=0$.

La idea consiste en hallar un vector $\vec{w}$ perpendicular a *r* para, utilizándolo, hallar la recta *s* perpendicular a *r*, contenida en π, que pasa por el punto *A*. Esta recta *s* cortará a *r* (están en el mismo plano y son perpendiculares) en un punto *M*. El punto simétrico de *A* respecto de *r*, A', se encuentra de *M* a la misma distancia que *M* de *A*: *M* es el punto medio de *A* y A'. Ahora ya será fácil hallar A' (ver figura).



Hallemos entonces un vector director $\vec{u}$ de la recta *r*. Para ello escribamos *r* en paramétricas.

$$y=\lambda \Rightarrow x=\lambda-1 \Rightarrow 2(\lambda-1)-z-1=0 \Rightarrow z=2\lambda-2 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\lambda-1 \\ y=\lambda \\ z=2\lambda-2 \end{cases} \Rightarrow \vec{u}=(1,1,2)$$

Un vector perpendicular al plano π es $\vec{v}=(1,-1,0)$.

Entonces el vector $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$ es simultáneamente perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$. Hallémoslo:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j+i & k \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} j+i & k \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2i+2j-2k \Rightarrow \vec{w}=(2,2,-2)$$

Podemos tomar $\vec{w}$ un vector proporcional: $\vec{w}=(1,1,-1)$.

La recta s que pasa por $A(1,2,3)$ y tiene dirección $\vec{w}=(1,1,-1)$ es perpendicular a *r* y está contenida en π:

$$s \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{-1} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x-1=y-2 \\ -y+2=z-3 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x-y=-1 \\ y+z=5 \end{cases}$$

Hallemos el punto de corte de *r* y *s*: $M = r \cap s$. Para ello resolvemos el sistema formado por *r* y *s*: $\begin{cases} x-y+1=0 \\ 2x-z-1=0 \\ x-y=-1 \\ y+z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=-1 \\ 2x-z=1 \\ y+z=5 \end{cases}$ (obsérvese que se ha eliminado la tercera ecuación, que es igual que la primera). De la primera ecuación $x = y-1$. Sustituyendo en la segunda: $2(y-1)-z=1 \Rightarrow 2y-z=3$ que, con la tercera forman el sistema $\begin{cases} 2y-z=3 \\ y+z=5 \end{cases}$, cuyas soluciones son: $y=\frac{8}{3}$, $z=\frac{7}{3}$. Sustituyendo en la expresión de *x* se tiene $x=\frac{5}{3}$, con lo que $M\left(\frac{5}{3},\frac{8}{3},\frac{7}{3}\right)$.

Supongamos que el punto simétrico de $A(1,2,3)$ respecto de *r* es $A'(a,b,c)$. Como *M* es el punto medio de *A* y A', entonces $\begin{cases} \frac{a+1}{2}=\frac{5}{3} \\ \frac{b+2}{2}=\frac{8}{3} \\ \frac{c+3}{2}=\frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{7}{3} \\ b=\frac{10}{3} \\ c=\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow A'\left(\frac{7}{3},\frac{10}{3},\frac{5}{3}\right)$. †

---

15. Dados los puntos $A(-2,-4,-3)$ y $B(2,6,5)$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y-3z=2 \end{cases}$, averiguar si existe alguna recta tal que contenga los puntos *A* y *B* y corte a la recta *r*. Razonar la respuesta.

septiembre 2000

Solución

Se trata de hallar la posición relativa de *r* y la recta *s* que pasa por *A* y *B*.

Pasemos *r* a paramétricas.

$$z=t \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x-y=1-t \\ 2x+y=2+3t \end{cases} \Rightarrow x=1+\frac{2}{3}t,\ y=\frac{5}{3}t \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1+\frac{2}{3}t \\ y=\frac{5}{3}t \\ z= \end{cases}$$

Un vector director de *r* es $\left(\frac{2}{3},\frac{5}{3},1\right)$ y podemos tomar también uno proporcional: $\vec{u}=(2,5,3)$. Un punto de *r* es $M(1,0,0)$.

La recta *s* que pasa por *A* y *B* es tiene vector director $\overrightarrow{AB}=(4,10,8)$ y podemos tomar también uno proporcional: $\vec{v}=(2,5,4)$.

Estudiemos la posición relativa de *r* y *s*:

- $\text{rango}\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix}$ $\text{rango}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}=2$ ($\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son proporcionales).

- rango$\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \overrightarrow{MA} \end{pmatrix}$ = rango$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -3 & -4 & -3 \end{pmatrix} = 3$, ya que $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -3 & -4 & -3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$.

Por tanto, *r* y *s* se cruzan y no puede existir ninguna recta que contenga a los puntos *A* y *B* y corte a la recta *r*. †

---

16. Hallar el punto simétrico del punto $A(2,-3,5)$ respecto del plano $\alpha \equiv x-3y+4z+21=0$.

septiembre 2000

Solución

La resolución de este ejercicio es como la del ejercicio número 8.

Calculemos la recta *r* que pasa por *A* y es perpendicular al plano α. Esta recta tendrá como vector director un vector perpendicular al plano α: $\vec{u}=(1,-3,4)$.

Las ecuaciones de r serán pues: $r \equiv \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-3-3\lambda \\ z=5+4\lambda \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z-5}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} -3x+6=y+3 \\ 4y+12=-3z+15 \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} 3x+y=3 \\ 4y+3z=3 \end{cases}$.

Resolviendo el sistema $\begin{cases} 3x+y=3 \\ 4y+3z=3 \\ x-3y+4z=-21 \end{cases}$, formado por la recta y el plano obtenemos el punto *M* donde la recta corta al plano.

De la primera ecuación:

$y=3-3x$.

Sustituyendo en la segunda:

$4(3-3x)+3z=3 \Rightarrow -12x+3z=-9 \Rightarrow -4x+z=-3$.

Sustituyendo en la tercera:

$x-3(3-3x)+4z=-21 \Rightarrow x-9+9x+4z=-21 \Rightarrow 10x+4z=-12 \Rightarrow 5x+2z=-6$.

Tenemos pues el sistema: $\begin{cases} -4x+z=-3 \\ 5x+2z=-6 \end{cases}$, de donde $x=0$, $z=-3$. Por tanto, como $y=3-3x \Rightarrow y=3$.

Así, el punto *M* donde la recta *r* corta al plano α es $M(0,3,-3)$. Este punto es el punto medio del simétrico $A'(a,b,c)$ de $A(2,-3,5)$ respecto del plano α. Entonces: (0, 3, −3) $\left(\dfrac{a+2}{2}, \dfrac{b-3}{2}, \dfrac{c+5}{2}\right)$, de donde $a=-2$, $b=9$, $c=-11$.

Por tanto, el simétrico de *A* respecto del plano α es $A'(-2,9,-11)$. †

17. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = 2+2\mu \\ z = 0 \end{cases}$.

a) Estudia la posición relativa de las rectas *r* y *s*.

b) Halla la ecuación de una recta que sea perpendicular simultáneamente a *r* y *s*.

junio 2001

Solución

a) Punto y vector director de *r*: $A(1,0,0)$, $\vec{u} \quad (1,1,-1)$.

Punto y vector director de *s*: $B(0,2,0)$, $\vec{v} = (1,2,0)$.

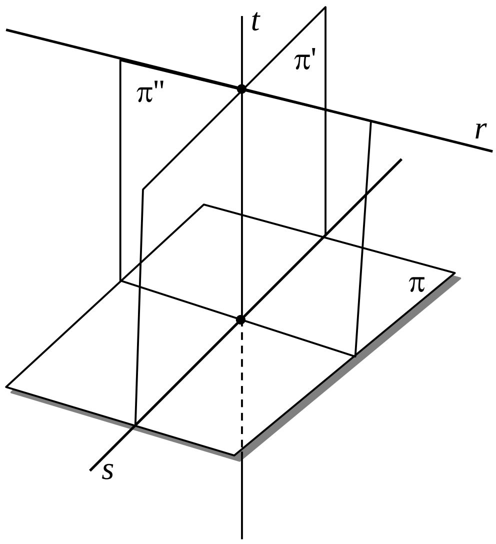
$\text{rango}\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} \quad \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2$ (hay un menor de orden dos distinto de cero, con lo que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son proporcionales).

$$\text{rango}\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \overrightarrow{AB} \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 3, \text{ ya que } \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Por tanto, *r* y *s* se cruzan.

b) *Este parte es similar al ejercicio 11.*

Las ecuaciones implícitas de r y s son:



$$r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \Rightarrow r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x-1 = y \\ -y = z \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x-y-1=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = 2+\quad\mu \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{0} \Rightarrow$$

$$\equiv \begin{cases} 2x = y-2 \\ 0 \quad 2z \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} 2x-y+2=0 \\ z=0 \end{cases}$$

- Hallemos el plano π que pasa por *s* y es paralelo a *r*. Escribamos para ello la ecuación del haz de planos de arista *s*: $\lambda(2x-y+2)+\mu z = 0 \Leftrightarrow 2\lambda x - \lambda y + \mu z + 2 = 0$. Para que un plano de este haz sea paralelo a la recta *r* se debe cumplir que el vector perpendicular al plano $(2\lambda, -\lambda, \mu)$ sea perpendicular a un vector director de *r*, $\vec{u} = (1,1,-1)$, es decir, que el producto escalar de ambos sea cero: $2\lambda - \lambda - \mu = 0 \Rightarrow \lambda - \mu = 0 \Rightarrow \lambda = \mu$. Tomando pues $\lambda = \mu = 1$, se tiene: $\pi \equiv 2x - y + z + 2 = 0$.

- Hallemos ahora el plano π' que pasa por *s* y es perpendicular a π. Ya sabemos que el haz de planos de arista *s* es $2\lambda x-\lambda y+\mu z+2=0$. Para que un plano de este haz sea perpendicular a π se debe cumplir que los vectores perpendiculares a ambos planos sean perpendiculares, es decir, que el producto escalar de los vectores $(2\lambda,-\lambda,\mu)$ y $(2,-1,1)$ sea 0: $4\lambda+\lambda+\mu=0\Rightarrow 5\lambda+\mu=0$. Tomando $\lambda=1$, $\mu=-5$, tenemos $\pi'\equiv 2x-y-5z+2=0$
- Hallemos por último el plano π'' que pasa por *r* y es perpendicular a π. El haz de planos de arista *r* es: $\lambda(x-y-1)+\mu(y+z)=0\Leftrightarrow \lambda x+(-\lambda+\mu)y+\mu z=0$. Para que un plano de este haz sea perpendicular a π se debe cumplir (al igual que en el punto anterior) que los vectores $(\lambda,-\lambda+\mu,\mu)$ y $(2,-1,1)$ sean perpendiculares, es decir que $2\lambda+\lambda-\mu+\mu=0\Leftrightarrow 3\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=0$. Tomando $\lambda=0$ y $\mu=1$, se tiene que $\pi''\equiv y+z=0$.

La recta *t*, perpendicular común a *r* y *s*, es la intersección de π' y π'', luego tiene ecuaciones implícitas $t\equiv\begin{cases}2x-y-5z+2=0\\ y+z=0\end{cases}$

Si se quiere hallar también la distancia entre *r* y *s*, se aplica la fórmula de la distancia de un punto cualquiera de *r*, por ejemplo $A(1,0,0)$, al plano $\pi\equiv 2x-y+z+2=0$:

$$d(r,s)=d(A,\pi)=\frac{|2\cdot 1+(-1)\cdot 0+1\cdot 0+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{6}}=\frac{4\sqrt{6}}{6}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\text{ uds}$$ †

---

18. Determina las coordenadas del punto simétrico del punto $A(-2,1,6)$ respecto de la recta

$$r\equiv\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{2}$$

junio 2001

Solución

La resolución de este ejercicio es como la del ejercicio número 14.

Las ecuaciones implícitas de *r* son: $r\equiv\begin{cases}2x+2=y-3\\ 2y-6=2z+2\end{cases}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}2x-y=-5\\ 2y-2z=8\end{cases}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}2x-y+5=0\\ y-z-4=0\end{cases}$

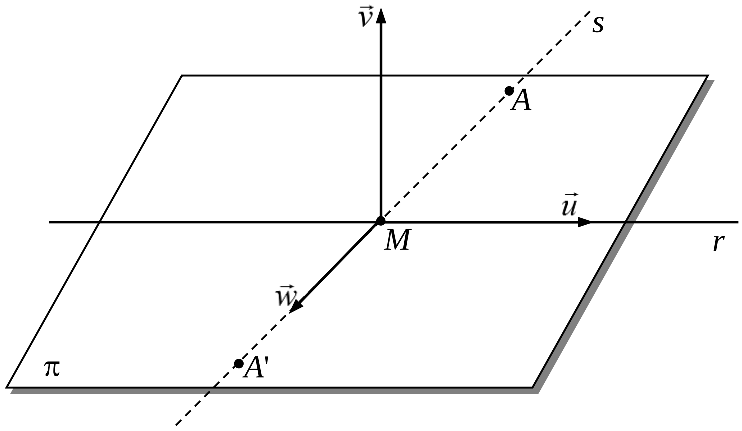
Hallemos el plano π que contiene al punto A y a la recta r.

El haz de planos de base la recta *r* es $\lambda(2x-y+5)+\mu(y-z-4)=0$. Podemos suponer que $\lambda\neq 0$ y dividir todos los términos entre λ con lo que la ecuación del haz queda de la forma: $2x-y+5+t(y-z-4)=0$, donde $t=\mu/\lambda$. Como el plano contiene al punto *A*, entonces $-4-1+5+t(1-6-4)=0\Rightarrow -9t=0\Rightarrow t=0$ y el plano π que buscamos es $\pi\equiv 2x-y+5=0$.

La idea consiste en hallar un vector $\vec{w}$ perpendicular a *r* para, utilizándolo, hallar la recta *s* perpendicular a *r*, contenida en π, que pasa por el punto *A*. Esta recta *s* cortará a *r* (ya que están en el mismo plano y son perpendiculares) en un punto *M*. El punto simétrico de *A* respecto de *r*, A', se encuentra de *M* a la misma distancia que *M* de *A*: *M* es el punto medio de *A* y A'. Ahora ya será fácil hallar A' (ver figura).

Un vector director $\vec{u}$ de la recta *r* es $\vec{u}=(1,2,2)$.

Un vector perpendicular al plano π es $\vec{v}=(2,-1,0)$.



Entonces el vector $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$ es simultáneamente perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$. Hallémoslo:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=(4j-k)-(4k-2i)=2i+4j-5k\Rightarrow\vec{w}=(2,4,-5).$$

La recta *s* que pasa por $A(-2,1,6)$ y tiene dirección $\vec{w}$ $(2,4,-5)$ es perpendicular a *r* y está contenida en π: $s\equiv\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-6}{-5}\Rightarrow s\equiv\begin{cases}4x+8=2y-2\\-5y+5=4z-24\end{cases}\Rightarrow s\equiv\begin{cases}4x-2y=-10\\5y+4z=29\end{cases}\Rightarrow s\equiv\begin{cases}2x-y=-5\\5y+4z=29\end{cases}$.

Hallemos el punto de corte de *r* y *s*: $M=r\cap s$. Para ello resolvemos el sistema formado por las rectas *r* y *s*: $\begin{cases}2x-y+5=0\\y-z-4=0\\2x-y=-5\\5y+4z=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-y=-5\\y-z=4\\5y+4z=29\end{cases}$ (obsérvese que se ha eliminado la tercera ecuación, que es igual que la primera). De las dos últimas ecuaciones se obtiene: $y=5$, $z=1$. Sustituyendo en la primera se obtiene $x=0$, con lo que $M(0,5,1)$.

Supongamos que el punto simétrico de $A(-2,1,6)$ respecto de *r* es $A'(a,b,c)$. Como *M* es el punto medio de *A* y A', entonces $\begin{cases}\dfrac{a-2}{2}=0\\\dfrac{b+1}{2}=5\\\dfrac{c+6}{2}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=9\\c=-4\end{cases}\Rightarrow A'(2,\ 9,\ -4)$. †

---

19. Halla el valor de k para que las rectas $r\equiv\begin{cases}x+y=2\\y-z=3\end{cases}$ y $s\equiv\begin{cases}y\quad 3z=k\\y-2z=2\end{cases}$ se corten. Halla el punto de corte.

septiembre 2001

Solución

Para que se corten el sistema conjunto $\begin{cases} x+y=2 \\ y-z=3 \\ y \quad 3z=k \\ \quad\ \ 2z=2 \end{cases}$ formado por las ecuaciones de *r* y de *s*, debe tener solución única. Para ello el determinante de la matriz ampliada tiene que ser cero porque, en caso contrario, el rango de la matriz ampliada sería 4 y el rango de la matriz de los coeficientes es 3 (hay un menor de orden 3 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$), con lo que el sistema sería incompatible y las rectas no podrían cortarse. De este modo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & k \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & k \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & k-3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & k-3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2-(-k+3) = k-1 = 0 \Leftrightarrow k=1.$$

Para hallar el punto de corte *P* de *r* y *s* resolvemos el sistema. Sustituimos *k* por su valor y eliminamos, por ejemplo, la última ecuación: $\begin{cases} \quad +y=2 \\ y-z=3 \\ \quad 3z=1 \end{cases}$. De las dos últimas se obtiene $y=4$, $z=1$. Sustituyendo en la primera: $x=-2$. Por tanto, el punto de corte de *r* y *s* es $P(-2,4,1)$. †

---

20. Halla λ para que el plano $\pi \equiv 2x+\lambda y-z=1$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y=1 \\ 2x+y-z=2 \end{cases}$ sean paralelos. ¿Puedes encontrar otro valor de λ para que sean perpendiculares?

septiembre 2001

Solución

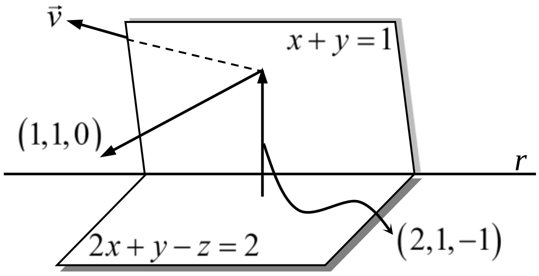
Para que la recta y el plano sean paralelos no deben tener ningún punto en común. Por tanto, el sistema conjunto formado por la recta y el plano, $\begin{cases} x+y \quad 1 \\ \ \ x+y-z=2 \\ 2x+\lambda y-z= \end{cases}$, no debe tener soluciones, es decir, el rango de la matriz *A* de los coeficientes tiene que ser distinto que el rango de la matriz ampliada $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & \lambda & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

El rango de esta última es 3 pues hay un menor de orden 3 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Por tanto, el rango de la matriz de los coeficientes *A* deber ser menor que 3 y para ello el determinante de la matriz *A* tiene que ser 0:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&0\\2&1&-1\\2&\lambda&-1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}1&0&0\\2&-1&-1\\2&\lambda-2&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1\\\lambda-2&-1\end{vmatrix}=1-(-\lambda+2)=\lambda-1=0\Leftrightarrow\lambda=1.$$

Para ver si se puede encontrar otro valor de λ para el que el plano y la recta sean perpendiculares, habremos de ver si un vector perpendicular del plano, $\vec{u}=(2,\lambda,-1)$ es paralelo o tiene la misma dirección que un vector director de la recta.



Hallaremos en este caso el vector director de la recta $\vec{v}$ como el producto vectorial de los dos vectores perpendiculares a los dos planos que la definen (ver figura):

$$\vec{v}=(1,1,0)\times(2,1,-1)=\begin{vmatrix}i&j&k\\1&1&0\\2&1&-1\end{vmatrix}=(-i+k)-(2k-j)=-i+j-k\Rightarrow\vec{v}=(-1,1,-1).$$

Otra forma alternativa de hallar el vector director de la recta r es pasándola a paramétricas. Para ello hay que resolver el sistema $\begin{cases}x+y=1\\2x+y-z=2\end{cases}$. Para ello, llamando $z=\lambda$, tenemos $\begin{cases}x+y=1\\x+y=2+\lambda\end{cases}$, y de aquí obtenemos que: $x=1+\lambda$, $y=-\lambda$, con lo que las ecuaciones paramétricas de la recta son $\equiv\begin{cases}x=1+\lambda\\y=-\lambda\\z=\lambda\end{cases}$. Por tanto, un vector director es $(1,-1,1)$ (obsérvese que tiene la misma dirección de $\vec{v}$ por ser proporcionales).

Pues bien, tal y como se había planteado, para que r y π sean perpendiculares, el vector perpendicular al plano $\vec{u}=(2,\lambda,-1)$ y el vector director de la recta $\vec{v}=(1,-1,1)$ deben ser paralelos. Es decir, debe existir $k\in\mathbb{R}$ tal que $\vec{u}=k\vec{v}$, es decir tal que $(2,\lambda,-1)=k(-1,1,-1)\Rightarrow(2,\lambda,-1)=(-k,k,-k)$, y esto es imposible pues tendría que ser simultáneamente $k=-2$ y $k=1$.

Por tanto, no existe ningún valor de λ para el que r y π sean perpendiculares. †