

1. [1 punto]

Enuncia y demuestra el teorema que relaciona la continuidad y la derivabilidad en un punto.

2. [1 punto]

Halla los valores de a y b para que la siguiente función sea continua en todo \mathbb{R} .

$$f(x) = \begin{cases} x + a & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ bx & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

3. [1 punto]

Dada la siguiente expresión, indica el tipo de indeterminación y calcula su límite, si existe.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$$

4. [1 punto]

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} bx^2 + ax & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{a}{x} & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ \frac{x^2 + ax + 1}{x+1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

calcula a y b para que sea derivable en $x = -1$ y $x = 1$.

5. [1 punto]

Halla los valores de la constante k para que las rectas tangentes a las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = (x-k)x$ en el punto de abscisa 1 sean:

- a) Paralelas
- b) Perpendiculares

6. [1 punto]

a) Dada la función $f(x) = \frac{x^2 + 8x}{x-1}$, calcula sus asíntotas, sitúalas sobre unos ejes e indica la posición de la gráfica respecto a ellas.

b) El denominador de la función $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4x - 5}$ se anula para los valores de $x = -1$ y $x = 5$, y sin embargo sólo tiene una asíntota vertical. Explica por qué.

7. [1 punto]

Usando la definición, halla la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x}$.

8. [2 puntos]

Usando las reglas de derivación, halla las derivadas de las 4 funciones siguientes:

- a) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 1}{e^{2x}}\right)$
- b) $f(x) = \sqrt{2e^x + \log_2 3x}$
- c) $f(x) = \sqrt[3]{\cos^2 x^3}$
- d) $f(x) = -\cos(\operatorname{sen}(tgx^2))$

9. [1 punto]

Comprueba si la función $f(x) = |x|^3$ es derivable o no en el punto $x = 0$.