

EXAMEN DERIVADAS

1.- Utilizando la definición, calcula la función derivada de la función

$$f(x) = x^2 - 5x + 7 \quad \text{¿Cuál es la pendiente de la recta tangente en } x = -1? \text{ (1 punto)}$$

2.- Dibuja una función que tenga derivada nula en $x = -1$ y $x = 1$, derivada negativa en el intervalo $(-1,1)$ y positiva para cualquier otro valor de x . (1 punto)

3.- Halla las derivadas de las siguientes funciones: (3 puntos)

$$\text{a) } y = \frac{2x^3 - 3x^2 + 2}{5x}$$

$$\text{b) } y = \sqrt{\cos x - \operatorname{sen} x}$$

$$\text{c) } y = \ln \left[\frac{x^2 - 3}{x^2 + 3} \right]$$

$$\text{d) } y = (x^2 + 3x) \cdot e^{-2x+1}$$

4.- Halla razonadamente un punto de la función $y = x^2 + x + 1$ en el que la recta tangente sea paralela a la recta de ecuación $y = 3x + 7$. Halla también la ecuación de dicha recta tangente. (1,5 puntos)

5.- Encuentra los valores de a y b para los que la función $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{x^2 - b}{2} & \text{si } x > -1 \end{cases}$ es continua y derivable en \mathbb{R} . (2 puntos)

6.- Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Halla a , b , c y d sabiendo que tiene extremos relativos en $(0,6)$ y $(-2,10)$. (1,5 puntos)

SOLUCIONES

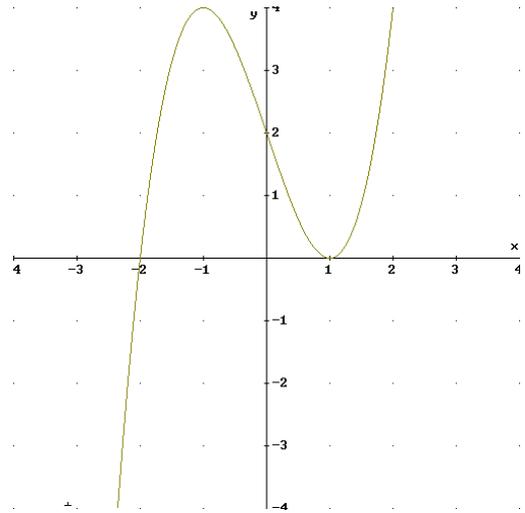
1.- $f(x) = x^2 - 5x + 7$ La función derivada es $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, de

donde:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - 5(x+h) + 7 - (x^2 - 5x + 7)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + h^2 + 2xh - 5x - 5h - x^2 + 5x - 7}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2xh - 5h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h + 2x - 5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 2x - 5) = 2x - 5 \end{aligned}$$

La pendiente de la tangente en $x=-1$ será $f'(-1) = 2 \cdot (-1) - 5 = -7$

2.- Una función que cumpla las características pedidas, tendrá que ser decreciente (derivada negativa) en el intervalo $(-1,1)$ y creciente en el resto. Por lo tanto, tendrá un máximo en -1 y un mínimo en 1 , por ejemplo la gráfica de la derecha cumple las condiciones.



$$\begin{aligned} 3.- \text{ a) } y &= \frac{2x^3 - 3x^2 + 2}{5x} & y' &= \frac{(6x^2 - 6x) \cdot 5x - (2x^3 - 3x^2 + 2) \cdot 5}{(5x)^2} = \\ &= \frac{30x^3 - 30x^2 - 10x^3 + 15x^2 - 10}{25x^2} = \frac{20x^3 - 15x^2 - 10}{25x^2} = \frac{4x^3 - 3x^2 - 2}{5x^2} \end{aligned}$$

$$\text{ b) } y = \sqrt{\cos x - \sin x} \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{\cos x - \sin x}} \cdot (-\sin x - \cos x) = -\frac{\sin x + \cos x}{2\sqrt{\cos x - \sin x}}$$

$$\begin{aligned} \text{ c) } y &= \ln \left[\frac{x^2 - 3}{x^2 + 3} \right] & y' &= \frac{1}{\frac{x^2 - 3}{x^2 + 3}} \cdot \frac{2x \cdot (x^2 + 3) - (x^2 - 3) \cdot 2x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{6x + 6x}{\frac{x^2 - 3}{x^2 + 3} \cdot (x^2 + 3)^2} \\ y' &= \frac{12x}{(x^2 - 3)(x^2 + 3)} = \frac{12x}{x^4 - 9} \end{aligned}$$

$$\text{ d) } y = (x^2 + 3x) \cdot e^{-2x+1} \rightarrow y' = (2x + 3) \cdot e^{-2x+1} + (x^2 + 3x) \cdot e^{-2x+1} \cdot (-2)$$

$$y' = (2x + 3) \cdot e^{-2x+1} + (-2x^2 - 6x) \cdot e^{-2x+1} = e^{-2x+1}(-2x^2 - 4x + 3)$$

4.- $y = x^2 + x + 1$ tangente paralela a $y = 3x + 7$, esto significa que tiene la misma pendiente, que es 3 (coeficiente de la x).

Luego, hallaremos la derivada e igualaremos a 3:

$y' = 2x + 1 = 3 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$, luego la recta tangente es en el punto de abscisa 1,

hallemos la ordenada: $y = 1^2 + 1 + 1 = 3$

Ecuación de la recta tangente: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$y = 3(x - 1) + 3 \Rightarrow y = 3x - 3 + 3 \Rightarrow y = 3x$

$$5.- f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{x^2 - b}{2} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$\frac{a}{x}$ es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow$ continua y derivable en $(-\infty, -1)$

$\frac{x^2 - b}{2}$ función polinómica, continua y derivable en $\mathbb{R} \Rightarrow$ continua y derivable en

$(-1, \infty)$, luego habrá que ver qué pasa en el punto -1:

$$f(-1) = -a$$

continuidad en -1: $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{a}{x} = -a \Rightarrow -a = \frac{1-b}{2} \Rightarrow b = 1 + 2a (*)$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - b}{2} = \frac{1-b}{2}$$

Derivabilidad en -1:

$$f'(-1^-) \rightarrow y = \frac{a}{x} \rightarrow y' = -\frac{a}{x^2} \Rightarrow f'(-1^-) = -\frac{a}{(-1)^2} = -a$$

$$f'(-1^+) \rightarrow y = \frac{x^2 - b}{2} \rightarrow y' = \frac{2x}{2} = x \Rightarrow f'(-1^+) = -1 \Rightarrow a = 1$$

$$(*) b = 1 + 2a \Rightarrow b = 3$$

Luego, la función es continua y derivable en su dominio para $a = 1$ $b = 3$

$$6.- f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$\text{pasa por los puntos } (-2, 10) \text{ y } (0, 6) \rightarrow \begin{cases} f(0) = 6 \rightarrow d = 6 \\ f(-2) = 10 \rightarrow -8a + 4b - 2c + 6 = 10 \end{cases}$$

$$\text{extremos relativos en } -2 \text{ y } 0 \rightarrow \begin{cases} f'(0) = 0 \rightarrow c = 0 \\ f'(-2) = 0 \rightarrow 12a - 4b + c = 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} -8a + 4b = 4 \\ 12a - 4b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 4a = 4 \rightarrow a = 1 \Rightarrow -8 + 4b = 4 \Rightarrow 4b = 12 \Rightarrow b = 3$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 6$$