

1. Dada $f(x) = \frac{4}{x^2 - 4}$
- Razonar cuál es su Dom(f)
 - Hallar su posible simetría.
 - Obtener los posibles cortes con los ejes.
 - Tabla de valores apropiada y representación gráfica.
 - A la vista de la gráfica indicar su Im(f)
 - Estudiar su continuidad
 - Hallar la antiimagen de $y=1/3$
 - Posibles M y m. Intervalos de crecimiento.
 - Hallar analíticamente $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
 - Ecuación de las posibles asíntotas. (2 puntos)

2. Dada $f(x) = \begin{cases} -x + 4 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 - x - 6 & \text{si } -2 < x \leq 6 \\ 24 & \text{si } x > 6 \end{cases}$
- Representarla gráficamente.
 - Indicar su Dom(f) e Im(f)
 - Hallar analíticamente los posibles cortes con los ejes.
 - Posibles M y m. Intervalos de crecimiento.
 - Estudiar su continuidad
 - Ecuación de las posibles asíntotas.
 - Hallar la antiimagen de $y=14$
 - Hallar $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ (1,75 puntos)

3. a) Hallar razonadamente $\log_3 \frac{1}{3\sqrt[4]{27}}$ y $\log_{1/5} 125$
- b) Calcular $\log \sqrt{3,6}$ en función de $\log 2$ y $\log 3$
- c) Hallar razonadamente x en las expresiones $\log_x 5 = -3$ y $\log_3(\log_3 3) = x$ (1,25 puntos)

4. Resolver: a) $2^{x-1} \cdot 3^{1-x} = 5^{2x-2}$ b) $3^{x-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x-1}$ c) $2^{2x-1} - 16 = 2^{x+1}$ (1,5 puntos)

5. Calcular: a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1} \right) =$ (1,5 puntos)

6. a) Hallar la derivada de $f(x) = \sqrt{x+1}$ aplicando la definición, es decir, mediante un límite.
- b) Derivar $y = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}$ y simplificar.
- c) Ídem: $y = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt[3]{x^2 + 1}$
- d) Ídem: $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$ (2 puntos)

① $f(x) = \frac{4}{x^2-4}$ a) $x^2-4=0; x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \Rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$ 0.2/

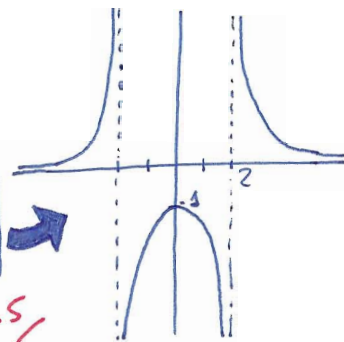
b) $f(-x) = \frac{4}{(-x)^2-4} = \frac{4}{x^2-4} = f(x) \Rightarrow f(x)$ simétrica par 0.2/

c) corte eje x: $y=0 \Rightarrow \frac{4}{x^2-4}=0; 4=0!! \Rightarrow$ no corta al eje x 0.2/

corte eje y: $x=0 \Rightarrow y = \frac{4}{-4} = -1 \Rightarrow (0, -1)$

d)

x	$-\infty \dots -100 \dots -6$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	$\dots 100 \dots \infty$	
$y = \frac{4}{x^2-4}$	0^+	0,0004...	0,125	0,19	0,3	0,8	$\frac{1}{4}$	-1,3	-1	-1,3	0,8	0,3	0,19	0,125...	0^+



e) $\text{Im}(f) = (-\infty, -1] \cup (0, \infty)$ 0.1/

f) $f(x)$ discontinua en $x = \pm 2$ 0.1/

g) $y = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{4}{x^2-4}; x^2-4=12; x^2=16 \Rightarrow x = \pm 4$ 0.1/

h) $f(x) \neq \forall x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0)$
 $f(x) \neq \forall x \in (0, 2) \cup (2, \infty) \Rightarrow M(0, -1)$ 0.2/

i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{x^2-4} = \frac{4}{0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4}{(x+2)(x-2)} = \frac{4}{4 \cdot 0^-} = \frac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4}{(x+2)(x-2)} = \frac{4}{4 \cdot 0^+} = \frac{4}{0^+} = \infty \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 0.3/

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2-4} = \frac{4}{\infty} = 0^+ \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x^2-4} = \frac{4}{\infty} = 0^+$

j) $y=0$ A.V.; $x = \pm 2$ A.V. 0.1/

TOTAL: [2]

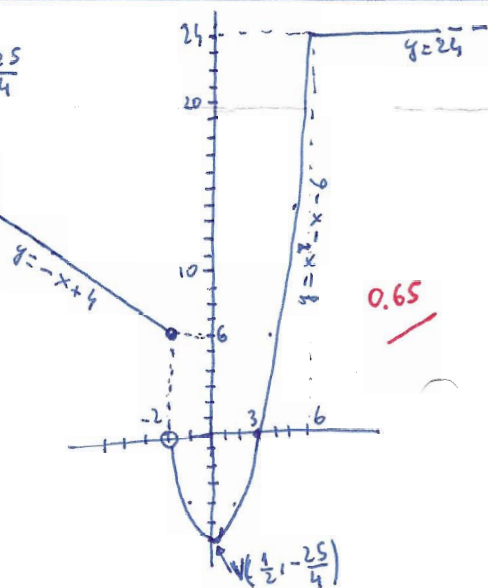
② $f(x) = \begin{cases} -x+4 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2-x-6 & \text{si } -2 < x \leq 6 \\ 24 & \text{si } x > 6 \end{cases}$

a)

x	-3	-2
y = -x+4	7	6

vértice $x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 6 = -\frac{25}{4}$

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y = x^2-x-6	0	-4	-6	-6	-4	0	6	14	24



b) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}; \text{Im}(f) = [-\frac{25}{4}, \infty)$ 0.2/

c) corte eje x: $y=0 \Rightarrow x^2-x-6 \Rightarrow x_1 = -2 \rightarrow (-2, 0)$
 $x_2 = 3 \rightarrow (3, 0)$ 0.2/

corte eje y: $x=0 \Rightarrow y = -6 \rightarrow (0, -6)$

d) $f(x) \neq \forall x \in (-\infty, \frac{1}{2})$
 $f(x) \neq \forall x \in (\frac{1}{2}, 6)$
 $f(x)$ cte. $\forall x \in (6, \infty) \Rightarrow m(\frac{1}{2}, -\frac{25}{4})$ 0.2/

e) $f(x)$ discontinua en $x = -2$ 0.1/

f) no tiene asíntotas 0.1/

g) $y = 14 \xrightarrow{\text{2º ramo}} 14 = x^2-x-6; 0 = x^2-x-20 \Rightarrow x = 5$ 0.2/

$\xrightarrow{\text{1º ramo}} 14 = -x+4; x = -10$

$x = -4$ descartada viendo la gráfica

h) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 6$
 $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0 \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ 0.1/

TOTAL: [1,75]

③ a) $\log_3 \frac{1}{3 \cdot \sqrt[4]{27}} = \log_3 1 - \log_3 (3 \cdot \sqrt[4]{27}) = -\log_3 3 - \log_3 \sqrt[4]{27} = -1 - \frac{1}{4} \log_3 27 = -1 - \frac{3}{4} = -\frac{7}{4}$ 0.25/

$\log_{1/5} 125 = x \Rightarrow (\frac{1}{5})^x = 125; (5^{-1})^x = 5^3; 5^{-x} = 5^3 \Rightarrow x = -3$ 0.25/

0.25/

b) $\log \sqrt[3]{36} = \frac{1}{2} \log \frac{36}{10} = \frac{1}{2} (\log 36 - \log 10) = \frac{1}{2} [\log (3^2 \cdot 2^2) - 1] = \frac{1}{2} (-1 + 2 \log 3 + 2 \log 2) = -\frac{1}{2} + \log 2 + \log 3$

c) $\log_x 125 = -3 \Rightarrow x^{-3} = 125$; $\frac{1}{x^3} = 125$; $\frac{1}{125} = x^3 \Rightarrow \boxed{x = 1/5}$ 0.25/

$\boxed{x = \log_3(\log_3 3)} = \log_3 1 = \boxed{0}$ 0.25/

TOTAL: $\boxed{1,25}$

④ a) $2^{x-1} \cdot 3^{1-x} = 5^{2x-2}$; $\log(2^{x-1} \cdot 3^{1-x}) = \log 5^{2x-2}$; $\log 2^{x-1} + \log 3^{1-x} = \log 5^{2x-2}$

$(x-1) \log 2 + (1-x) \log 3 = (2x-2) \log 5$; $x \log 2 - \log 2 + \log 3 - x \log 3 = 2x \log 5 - 2 \log 5$;

$x(\log 2 - \log 3) - 2 \log 5 = \log 2 - \log 3 - 2 \log 5$; $\boxed{x = \frac{\log 2 - \log 3 - 2 \log 5}{\log 2 - \log 3 - 2 \log 5} = 1}$ 0.5/

b) $3^{x-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x-1}$; $3^{x-1} = (3^{-1})^{-2x-1}$; $3^{x-1} = 3^{2x+1} \Rightarrow x-1 = 2x+1$; $\boxed{-2 = x}$ 0.5/

c) $2^{2x-1} - 16 = 2^{x+1}$; $\frac{2^{2x}}{2} - 16 = 2 \cdot 2^x$; $\frac{1}{2}(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x - 16 = 0$; subst de var: $2^x = t \Rightarrow \frac{t^2}{2} - 2t - 16 = 0$

$t^2 - 4t - 32 = 0 \rightarrow t = 8 = 2^x \Rightarrow \boxed{x = 3}$ 0.5/

$t = -4 = 2^x \Rightarrow \text{no soluc}$

TOTAL: $\boxed{1,5}$

⑤ a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\sim} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3} = \boxed{1}$ 0.25/

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(x-2)^2}{(x+1)(x-2)^2} = \boxed{\frac{3}{4}}$ 0.25/

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}) \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}} =$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x - (x^2+1)}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}} =$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \boxed{\frac{1}{2}}$ 0.625/

$$\begin{array}{cccc} 1 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & -2 & -4 \\ \hline 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \rightarrow -1$

$$\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -4 & 8 \\ 2 & 2 & 0 & -8 \\ \hline 1 & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

$x^2 - 4 = 0; x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

TOTAL: $\boxed{1,5}$

⑥ a) $f(x) = \sqrt{x+1}$; $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h+1} - \sqrt{x+1}}{h} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h+1} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1})}{h \cdot (\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1})} =$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h+1) - (x+1)}{h(\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}$ 0.5/

b) $y = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} \rightarrow y' = \frac{1}{2} 2x - 2 \cdot \frac{-2x}{x^4} - \frac{1}{x^2} = \boxed{x + \frac{4}{x^3} - \frac{1}{x^2}}$ 0.5/

c) $y = \sqrt{x^2-1} - (x^2+1)^{1/3} \rightarrow y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{3} (x^2+1)^{-2/3} \cdot 2x = \boxed{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{2x}{3\sqrt{(x^2+1)^2}}}$ 0.5/

d) $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \xrightarrow{u^n} y' = 3 \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 \cdot \frac{x-1 - (x+1)}{(x-1)^2} = 3 \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} = \boxed{\frac{-6(x+1)^2}{(x-1)^4}}$ 0.5/

TOTAL: $\boxed{2}$