

1. Dada $f(x) = \frac{4x}{(x-1)^2}$
- Razonar cuál es su Dom(f)
 - Hallar su posible simetría.
 - Obtener los posibles cortes con los ejes.
 - Tabla de valores apropiada y representación gráfica.
 - A la vista de la gráfica indicar su Im(f)
 - ¿Es continua?
 - Hallar la antiimagen de $y=3$
 - Posibles M y m. Intervalos de crecimiento.
 - Hallar analíticamente $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
 - Ecuación de las posibles asíntotas. (2 puntos)

2. Dada $f(x) = \begin{cases} x + 10 & \text{si } x \leq -4 \\ x^2 + 2x & \text{si } -4 < x \leq 1 \\ 3/x & \text{si } x > 1 \end{cases}$
- Representarla gráficamente.
 - Indicar su Dom(f) e Im(f)
 - Hallar analíticamente los posibles cortes con los ejes.
 - Posibles M y m. Intervalos de crecimiento.
 - ¿Es continua?
 - Ecuación de las posibles asíntotas.
 - Hallar la antiimagen de $y=3$
 - Hallar $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$ a partir de la gráfica. (2 puntos)

3. Resolver: **a)** $2^{2x} = 4^{x^2}$ **b)** $9^x + 2 \cdot 3^{x+1} = 27$ **c)** $2^{x+1} = 3^{x-1} \cdot 4^x$ (2 puntos)

4. Calcular: **a)** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{x^2-3x+2}$ **b)** $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-3}{x^2-3x+2}$ **c)** $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-3x+2}{x-3}$
- d)** $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2} - x \right)$ **e)** $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x}$ (2 puntos)

5. **a)** Definir analíticamente $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ (es decir, como función definida por ramas), y representarla gráficamente.
- b)** Hallar $\log_2 \frac{\sqrt[5]{64}}{8}$ y $\log_9 3$
- c)** Calcular $\log \sqrt[3]{0,08}$ en función de $\log 2$
- d)** ¿En qué base se cumple que $\log_a 12 + \log_a 3 = 2$? (2 puntos)

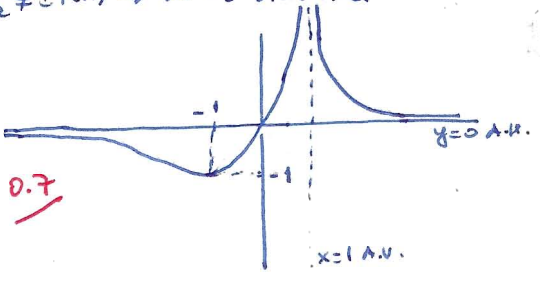
① $f(x) = \frac{4x}{(x-1)^2}$; a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$ 0.1/

b) $f(-x) = \frac{-4x}{(-x-1)^2} = \frac{-4x}{(x+1)^2} \neq \pm f(x) \Rightarrow$ no es simétrica 0.1/

c) corte eje x: $y=0 \Rightarrow 0 = \frac{4x}{(x-1)^2} \Rightarrow x=0 \Rightarrow \boxed{0,0}$ 0.1/

d)

x	$-\infty \dots -99 \dots -4$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\dots 101 \dots \infty$
$y = \frac{4x}{(x-1)^2}$	$0^- \dots -0,04$	$-0,64$	$-0,75$	$-0,98$	-1	$\cancel{0}$	8	3	$1,7$	$\dots 0,04 \dots 0^+$



e) $\text{Im}(f) = [-1, \infty)$ f) discontinua en $x=1$ 0.1/

g) $y=3 \Rightarrow \frac{4x}{(x-1)^2} = 3; 4x = 3(x^2 - 2x + 1); 4x = 3x^2 - 6x + 3; 0 = 3x^2 - 10x + 3$
 $x=3$ $x=1/3$ 0.2/

h) $f(x) \nearrow \forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ $m(-1, -1)$
 $f(x) \searrow \forall x \in (-1, 1)$ 0.2/

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x}{(x-1)^2} = \frac{4}{(0^-)^2} = \frac{4}{0^+} = \infty$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x}{(x-1)^2} = \frac{4}{(0^+)^2} = \frac{4}{0^+} = \infty$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$ 0.1/

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{(x-1)^2} \sim \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x} = 0^+$ 0.1/

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{(x-1)^2} \sim \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x} = 0^-$ 0.1/ j) $x=1$ A.V. $y=0$ A.H. 0.1/

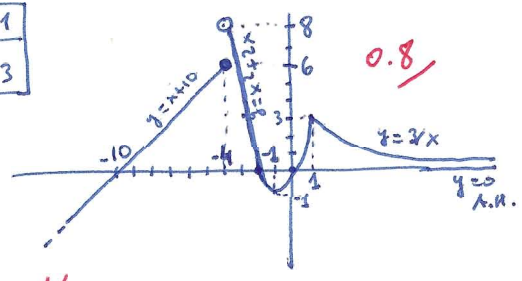
② $f(x) = \begin{cases} x+10 & \text{si } x \leq -4 \\ x^2+2x & \text{si } -4 < x \leq 1 \\ 3/x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a)

x	-10	-4
$y = x+10$	0	6

x	-4	-3	-2	-1	0	1
$y = x^2+2x$	8	3	0	-1	0	3

x	1	2	3	4	$\dots 100$	$\dots \infty$
$y = \frac{3}{x}$	3	1,5	1	0,75	$0,03$	$\dots 0^+$



b) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}; \text{Im}(f) = (-\infty, 8)$ 0.2/

c) cortes eje x: $y=0$
 1° rama: $x+10=0 \Rightarrow \boxed{x=-10}$ 0.2/
 2° rama: $x^2+2x=0; x(x+2)=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$ 0.2/
 $\boxed{x=-2}$ 0.2/

f) $y=0$ A.H. 0.1/

g) $y=3$
 1° rama: $x+10=3; \boxed{x=-7}$
 2° rama: $x^2+2x=3; x^2+2x-3=0 \Rightarrow \boxed{x=-3}$ 0.3/
 $\boxed{x=1}$ 0.3/
 3° rama: $\frac{3}{x}=3 \Rightarrow x=1$ (ya está repetido)

d) $f(x) \nearrow \forall x \in (-\infty, -4) \cup (-1, 1)$ $m(-1, -1)$
 $f(x) \searrow \forall x \in (-4, -1) \cup (1, \infty)$ $M(1, 3)$ 0.2/

h) $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = 6$
 $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = 8$
 $\Rightarrow \cancel{\lim_{x \rightarrow -4} f(x)}$ 0.1/

③ a) $2^{2x} = 4x^2; 2^{2x} = (2^2)^{x^2}; 2^{2x} = 2^{2x^2} \Rightarrow 2x = 2x^2; 2x^2 - 2x = 0; 2x(x-1) = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$ 0.5/
 $\Rightarrow \boxed{x=1}$ 0.5/

b) $9^x + 2 \cdot 3^{x+1} = 27; (3^2)^x + 2 \cdot 3 \cdot 3^x - 27 = 0; (3^x)^2 + 6 \cdot 3^x - 27 = 0;$
 cambio de var. $3^x = t \Rightarrow \boxed{t^2 + 6t - 27 = 0}$
 $t = 3 = 3^x \Rightarrow \boxed{x=1}$ 0.75/
 $t = -9 = 3^x \Rightarrow \cancel{\text{soluc.}}$

c) $2^{x+1} = 3^{x-1} \cdot 4^x; \log 2^{x+1} = \log(3^{x-1} \cdot 4^x); \log 2^{x+1} = \log 3^{x-1} + \log 4^x;$
 $(x+1) \log 2 = (x-1) \log 3 + x \log 4; x \log 2 + \log 2 = x \log 3 - \log 3 + x \log 4; \log 2 + \log 3 = x(\log 3 + \log 4 - \log 2)$
 $\boxed{x = \frac{\log 2 + \log 3}{\log 3 + \log 4 - \log 2} = 1}$ 0.75/

④ a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{(x-1)(x-2)} = \frac{-2}{0^- \cdot (-1)} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$ 0.4/
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{x^2-3x+2} = \frac{-2}{0^+ \cdot (-1)} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$

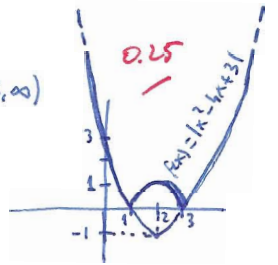
b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-3}{x^2-3x+2} \sim \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ 0.4/

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-3x+2}{x-3} \sim \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$ 0.4/
 d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2} - x\right) = 0 - \infty = -\infty$ 0.4/
 e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{\infty}} = e^{-\infty} = 0$ 0.4/

⑤ a) $f(x) = |x^2 - 4x + 3| = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{si } 1 < x < 3 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ 0.25/

↳ gracias a y 3

$\Rightarrow f(x) = |x^2 - 4x + 3| = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \in (-\infty, 1] \cup [3, \infty) \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{si } x \in (1, 3) \end{cases}$



b) $\log_2 \frac{\sqrt[5]{64}}{8} = \log_2 \sqrt[5]{64} - \log_2 8 = \frac{1}{5} \log_2 64 - \log_2 8 = \frac{6}{5} - 3 = \boxed{-\frac{9}{5}}$ 0.25/

$\log_9 3 = \log_9 \sqrt{9} = \frac{1}{2} \log_9 9 = \frac{1}{2}$ 0.25/

c) $\log_3 \sqrt[3]{0.08} = \frac{1}{3} \log_3 \frac{8}{100} = \frac{1}{3} (\log_3 8 - \log_3 100) = \frac{1}{3} (\log_3 2^3 - 2) = \frac{1}{3} (3 \log_3 2 - 2) = \boxed{-\frac{2}{3} + \log_3 2}$ 0.5/

d) $\log_a 12 + \log_a 3 = 2$; $\log_a (12 \cdot 3) = 2$; $\log_a 36 = 2 \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow \boxed{a = 6}$ 0.5/

($a = -6$ se descarta, por haberse de la base de un sistema de logaritmos)