1. Dada $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ se pide: **a)** Razonar cuál es su Dom(f) **b)** Posible simetría. **c)** Posibles cortes con los ejes. **d)** Tabla de valores apropiada y representación gráfica. **e)** Intervalos de crecimiento. Posibles M y m. **f)** Continuidad. **g)** A la vista de la gráfica, indicar su Im(f) **h)** Ecuación de las posibles asíntotas. **i)** $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$ **j)** Calcular la antiimagen de y=1/2 *(2 puntos)*

2. **a)** Dada la siguiente función, representarla y estudiar analíticamente su continuidad, clasificando sus posibles discontinuidades:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+8x+7 & \text{si } x\le -2 \\ \sqrt{x+2} & \text{si } -2<x\le 2 \\ \dfrac{5x-18}{2x-8} & \text{si } x>2 \end{cases}$$

b) Representar $f(x)=\left|x^2-8x+7\right|$ y expresarla como función definida a trozos. *(2 puntos)*

3. **a)** Calcular: $\log_3 \dfrac{3}{\sqrt[5]{81}}$ **b)** Ídem: $\ln\dfrac{\sqrt{e}}{e}$ **c)** Resolver: $4^x-14\cdot 2^{x-1}+12=0$

d) Ídem: log(6x-1)-log(x+4)=log x *(2 puntos)*

4. Calcular: **a)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^3-5x^2+3x+9}$ **b)** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-4x+3}{x^3-5x^2+3x+9}$ **c)** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}\right)$ *(2 puntos)*

5. **a)** Hallar la derivada de $f(x)=\sqrt{x}$ en x=1 mediante la definición, es decir, mediante un límite.

b) Derivar y simplificar: $y=\dfrac{3x^6-x^3+6x-5}{3}$

c) Ídem: $y=(x^2-5)(3x-1)+7$

d) Ídem: $y=\dfrac{x^2+x+1}{x}$ *(2 puntos)*

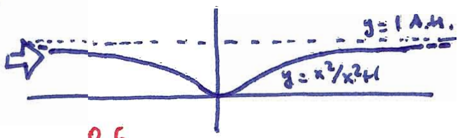
① $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$ a) $\boxed{Dom(f)=\mathbb{R}}$ pq. $x^2+1\neq 0 \ \forall \mathbb{R}$ 0.1

b) $f(-x)=\frac{(-x)^2}{(-x)^2+1}=\frac{x^2}{x^2+1}=f(x) \Rightarrow \boxed{f(x) \text{ simétrica par}}$ 0.2

c) corte eje x: $y=0 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+1}=0;\ x^2=0;\ x=0 \rightarrow \boxed{(0,0)}$ ← nos ahorramos el corte con el eje y 0.2

d)

x	$-\infty \ldots$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\ldots \infty$
$y=\frac{x^2}{x^2+1}$	$1^- \ldots$	0,96	0,94	0,9	0,8	0,5	0	0,5	0,8	0,9	0,94	0,96	$\ldots 1^-$

⇒ 

0,6

e) $\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \searrow \forall x<0 \\ f(x) \nearrow \forall x>0 \end{array}\right\} \Rightarrow m(0,0)}$ 0.2

f) $\boxed{f(x) \text{ continua } \forall x \in \mathbb{R}}$, a la vista de la gráfica 0.1

g) $\boxed{Im(f)=[0,1)}$ 0.1

TOTAL: $\boxed{2}$

h) $\boxed{y=1 \text{ A.H.}}$ 0.1

i) $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} f(x)=1^-}$ 0.1

j) $\frac{1}{2}=\frac{x^2}{x^2+1} \Rightarrow x^2+1=2x^2;\ 1=x^2 \Rightarrow \boxed{x=\pm 1}$ 0.3 (puede comprobarse también en la tabla...)

---

② a) $f(x)=\begin{cases} x^2+8x+7 & si\ x\le -2 \\ \sqrt{x+2} & si\ -2<x\le 2 \\ \frac{5x-18}{2x-8} & si\ x>2 \end{cases}$

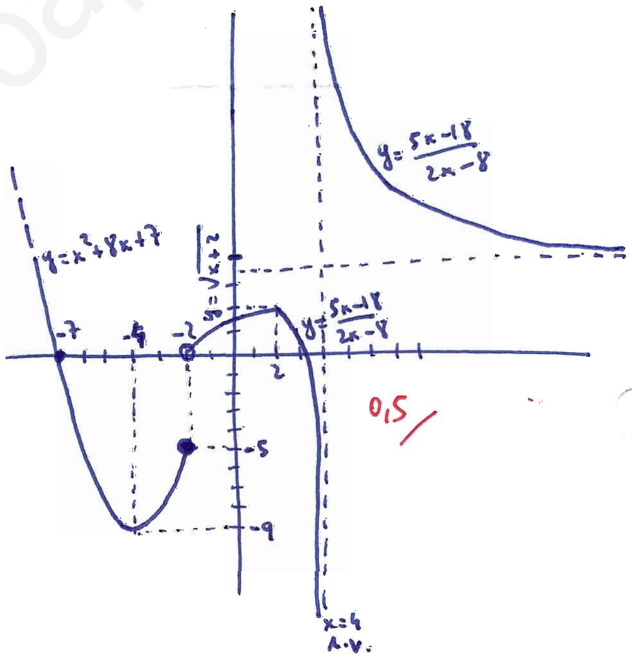
x	$-\infty \ldots$	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2
$y=x^2+8x+7$	$\infty \ldots$	16	7	0	-5	-8	-9	-8	-5

⇓ $V(-4,-9)$

x	-2	-1	0	1	2
$y=\sqrt{x+2}$	0	1	1,41	1,73	2

x	2	3	4	5	6	7	8	$\ldots 10000 \ldots \infty$
$y=\frac{5x-18}{2x-8}$	2	1,5	$\nexists$	3,5	3	$2,8\hat{3}$	2,75	$\ldots 2{,}5001 \ldots 2{,}5^+$

⇓ $x=4$ A.V.

⇒ 

0,5

* La 1ª rama es continua, por tratarse de un polinomio
* La 2ª rama tampoco presenta problemas porque el radicando $x+2$ es siempre positivo si $-2<x\le 2$
* La 3ª rama va a ser discontinua en $x=4$ (ya que anula el denominador), que está dentro de su particular dominio de definición; para clasificar la discontinuidad hay que hallar el límite:

$$\lim_{x\to 4} f(x)=\lim_{x\to 4}\frac{5x-18}{2x-8}=\frac{2}{0}\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to 4^-}\frac{5x-18}{2x-8}=\frac{2}{0^-}=-\infty \\ \lim_{x\to 4^+}\frac{5x-18}{2x-8}=\frac{2}{0^+}=\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 4} f(x)=\pm\infty \Rightarrow \boxed{\text{discontinuidad asintótica en } x=4}$$

0,25

* Pasamos a estudiar la continuidad en los puntos de unión de las ramas:

¿continua en $x=-2$?

1º) $\exists f(-2)=-5$ (1ª rama)

2º) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2} (x^2+8x+7) = -5 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2} \sqrt{x+2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 2} f(x) \Rightarrow$ $\boxed{\text{discontinuidad de salto finito en } x=-2}$

0,25

¿continua en $x=2$?

1º) $\exists f(2)=2$ (2ª rama)

2º) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x+2} = 2 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{5x-18}{2x-8} = \dfrac{-8}{-4} = 2 \end{cases} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2$ 0,25

TOTAL: $\boxed{2}$ → a) 1,25 ; b) 0,75

3º) coinciden $\Rightarrow$ $\boxed{f(x) \text{ continua en } x=2}$

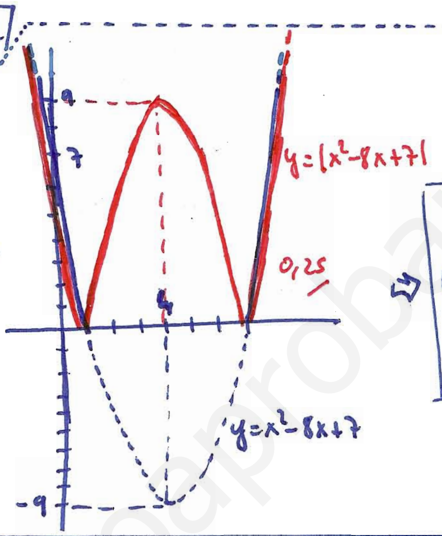
b) $f(x)=|x^2-8x+7|$

↳ raíces 1 y 7 (cortes eje x)

	$-\infty$ a 1	1 a 7	7 a ∞
signo x^2-8x+7	+	−	+
$f(x)=\lvert x^2-8x+7\rvert$	x^2-8x+7	$-x^2+8x-7$	x^2-8x+7

$x_v = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{8}{2} = 4 \to y_v = 16-32+7 = -9 \to V(4,-9)$

corte eje y: $x=0 \to y=7$ 0,25



$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2-8x+7 & \text{si } x\in(-\infty,1)\cup(7,\infty) \\ -x^2+8x-7 & \text{si } x\in[1,7] \end{cases}$

0.25

③ a) $\log_3 \dfrac{3}{\sqrt[5]{81}} = \cancel{\log_3 3}^{\,1} - \log_3 \sqrt[5]{81} = 1 - \dfrac{1}{5}\cancel{\log_3 81}^{\,4} = 1-\dfrac{4}{5} = \boxed{\dfrac{1}{5}}$ 0,25

b) $\ln \dfrac{\sqrt{e}}{e} = \ln\sqrt{e} - \cancel{\ln e}^{\,1} = \dfrac{1}{2}\cancel{\ln e}^{\,1} - 1 = \dfrac{1}{2}-1 = \boxed{-\dfrac{1}{2}}$ 0.25

TOTAL: $\boxed{2}$ → 0.25 ; 0.25 ; 0,75 ; 0.75

c) $4^x - 14\cdot 2^{x-1} + 12 = 0$; $(2^2)^x - 14\cdot\dfrac{2^x}{2} + 12 = 0$; $(2^x)^2 - 7\cdot 2^x + 12 = 0$

cambio de variable $x^2 = t \Rightarrow$ $t^2-7t+12=0$ 0.25

$t=3=2^x \Rightarrow \log 3 = \log 2^x \Rightarrow \log 3 = x\log 2 \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{\log 3}{\log 2}} \approx \boxed{1,58}$ 0.25

$t=4=2^x \Rightarrow \boxed{x=2}$ 0.25

d) $\log(6x-1) - \log(x+4) = \log x$; $\log\dfrac{6x-1}{x+4} = \log x \Rightarrow \dfrac{6x-1}{x+4} = x$; $6x-1 = x^2+4x$; $0 = x^2-2x+1 \Rightarrow \boxed{x=1}$ 0.25 0.5

④ a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{x^3-5x^2+3x+9} \overset{0/0}{=}$ (raíces 1 y 3) indet. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-1)\cancel{(x-3)}}{(x-3)^{\cancel{2}}\cdot(x+1)} = \dfrac{2}{0}$ 0,25

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x-1}{(x-3)(x+1)} = \dfrac{2}{0^-\cdot 4} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x-1}{(x-3)(x+1)} = \dfrac{2}{0^+\cdot 4} = \infty \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \pm\infty}$ 0.25

0,25

	1	−5	3	9
3		3	−6	−9
	1	−2	−3	$\boxed{0}$

↳ $\dfrac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \dfrac{2\pm 4}{2}$ → 3 ; −1

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\boxed{x^2}-4x+3}{\boxed{x^3}-5x^2+3x+9} = \dfrac{\infty}{-\infty} =$ indet. $\sim \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{x^3} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x} = \boxed{0^-}$

Los dominantes

0,5

c) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}\right) \underset{\text{indeterminado}}{\overset{\infty-\infty}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}+3x-(\cancel{x^2}+1)}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}} \underset{\text{indeterminado}}{\overset{\infty/\infty}{=}}$

0,25/ $= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+3x}}{x}+\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}} =$ 0,25/ $\lim_{x\to\infty} \frac{3-\cancel{\frac{1}{x}}^{0}}{\sqrt{1+\cancel{\frac{3}{x}}_{0}}+\sqrt{1+\cancel{\frac{1}{x^2}}_{0}}} = \boxed{\frac{3}{2}}$ 0,25/

la mayor potencia efectiva es x

TOTAL: $\boxed{2}$ 0,75 — 0,5 — 0,75

---

5) a) p. ej. mediante la fórmula (2):

$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \underset{\text{indeterminado}}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)} = \boxed{\frac{1}{2}}$ 0,5/

b) $y = \frac{3x^6-x^3+6x-5}{3} \xrightarrow[k\cdot u']{k\cdot u} y' = \frac{18x^5-3x^2+6}{3} = \boxed{6x^5-x^2+2}$ 0.5/

c) $y = (x^2-5)(3x-1)+7 \longrightarrow y' = 2x(3x-1)+(x^2-5)\cdot 3 = \boxed{9x^2-2x-15}$ 0.5/

d) $y = \frac{x^2+x+1}{x} \xrightarrow[\frac{u'v-uv'}{v^2}]{u/v} y' = \frac{(2x+1)\cdot x-(x^2+x+1)}{x^2} = \boxed{\frac{x^2-1}{x^2}}$ 0.5/

TOTAL: $\boxed{2}$