Ejercicio 1. *Calcular la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(3,-2)$ y $B(6,5)$ en las formas punto-pendiente, explícita y segmentaria.*

Solución:

La pendiente de la recta AB es:

$$m_{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{5-(-2)}{6-3}=\frac{7}{3}$$

de modo que la ecuación de la recta AB es:

$$y+2=\frac{7}{3}\,(x-3)$$

Para calcular la forma explícita de la ecuación se despeja y y se obtiene:

$$y=\frac{7}{3}\,x-9$$

La ordenada en el origen es -9. Para calcular la abscisa en el origen hallamos el punto de intersección de la recta con el eje de abscisas. Este punto se obtiene resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} y=\frac{7}{3}\,x-9 \\ y=0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad x=\frac{27}{7}$$

La ecuación en forma segmentaria resulta ser:

$$\frac{x}{\frac{27}{7}}+\frac{y}{-9}=1$$

Ejercicio 2. *Calcular k para que los puntos $A(-1,3)$, $B(2,k)$ y $C(6,-4)$ estén alineados. Calcular la ordenada en el origen de la recta que pasa por los tres puntos.*

Solución:

Si los puntos están alineados, la pendiente de la recta AB es igual que la pendiente de la recta AC. Entonces:

$$\begin{aligned} m_{AB}&=\frac{k-3}{2+1}=\frac{k-3}{3} \\ m_{AC}&=\frac{-4-3}{6-(-1)}=-1 \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{k-3}{3}=-1 \qquad \Longrightarrow \qquad k=0$$

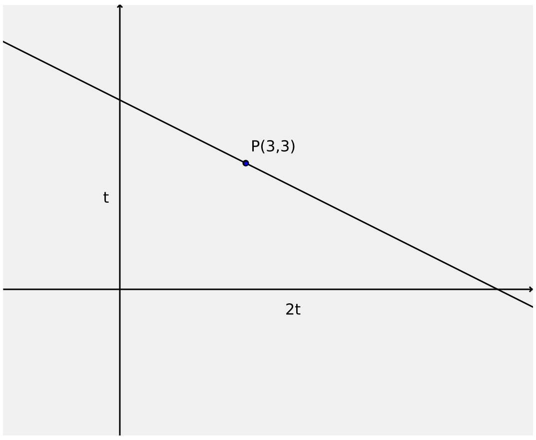
La recta que pasa por los tres puntos tiene pendiente -1. Su ecuación es:

$$y-3=-1\,(x+1) \qquad \text{o bien} \qquad y=-x+2$$

de modo que la ordenada en el origen vale 2.

Ejercicio 3. *Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3,3)$ y corta a los ejes de abscisas y ordenadas en los puntos A y B tales que la longitud de OA es doble que la longitud de OB.*

Solución:



La pendiente de la recta puede ser $\frac{1}{2}$ o $\frac{-1}{2}$. Tenemos dos soluciones

$$y - 3 = \frac{1}{2}\,(x-3); \qquad y - 3 = -\frac{1}{2}\,(x-3)$$

También podría ocurrir que la recta pase por el origen puesto que en este caso determina sobre ambos ejes segmentos de longitud cero. La solución en este caso, sería:

$$y = x$$

Ejercicio 4. *Calcular el área del triángulo de vértices $A(-2,5)$, $B(1,-2)$ y $C(7,10)$.*

Solución:

Podemos tomar como base la distancia AB y como altura la distancia de C a la recta AB. La distancia entre los puntos A y B es:

$$d(A,B) = \sqrt{(-2-1)^2 + (5-(-2))^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$$

La pendiente de la recta AB es:

$$m_{AB} = \frac{-2-5}{1-(-2)} = \frac{-7}{3}$$

de forma que la ecuación de esta recta es:

$$y - 5 = -\frac{7}{3}\,(x+2) \qquad \text{o bien} \qquad 7x + 3y - 1 = 0$$

La altura del triángulo es la distancia del vértice C a esta recta:

$$d = \frac{7\cdot 7 + 3\cdot 10 - 1}{\sqrt{7^2+3^3}} = \frac{78}{\sqrt{58}}$$

El área del triángulo es:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{58}\cdot\frac{78}{\sqrt{58}} = 39$$

Ejercicio 5. *Dados los puntos $A(1,3)$ y $B(5,-2)$. Hallar un punto P del eje de abscisas tal que el triángulo APB sea rectángulo en P.*

Solución:

sea $P(x,0)$ el punto que buscamos. Las pendientes de las rectas AP y BP son:

$$m_{AP} = \frac{-3}{x-1}; \qquad m_{BP} = \frac{2}{x-5}$$

Como estas rectas deben ser perpendiculares, debe cumplirse que

$$1 + m_{AP}m_{BP} = 0$$

Sustituyendo

$$1 - \frac{3}{x-1}\cdot\frac{2}{x-5} = 0 \quad\Longrightarrow\quad x^2-6x-1=0 \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x_1 = 3+\sqrt{10} \\ x_2 = 3-\sqrt{10} \end{cases}$$

Ejercicio 6. *Calcular el punto simétrico de* $P(2,5)$ *respecto de la recta* $r: 2x-3y+6=0$.

Solución:

Calculamos la perpendicular a la recta r por el punto P. Puesto que la recta r tiene pendiente $\frac{2}{3}$, la perpendicular tendrá pendiente $\frac{3}{2}$. La ecuación de la perpendicular es:

$$y-5 = \frac{3}{2}(x-2) \qquad \text{o bien} \qquad 3x+2y-16=0$$

La intersección de la recta r con esta perpendicular (el pie de la perpendicular) es la solución del sistema

$$\begin{cases} 2x-3y+6=0 \\ 3x+2y-16=0 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad x=\frac{36}{13},\quad y=\frac{50}{13}$$

Este punto es el punto medio entre P y su simétrico P'. Las coordenadas de P' las obtenemos de:

$$\frac{36}{13} = \frac{2+x'}{2} \quad\Longrightarrow\quad x' = \frac{46}{13}$$

$$\frac{50}{13} = \frac{5+y'}{2} \quad\Longrightarrow\quad y' = \frac{35}{13}$$

Ejercicio 7. *Calcular un punto de la recta* $x+y-1=0$ *equidistante de* $A(1,2)$ *y de* $B(-3,5)$.

Solución:

Sea P el punto que buscamos. Si equidista de A y B se encontrará en su mediatriz. La ecuación de la mediatriz es:

$$(x-1)^2+(y-2)^2 = (x+3)^2+(y-5)^2 \qquad \text{o bien} \qquad 8x-6y+29=0$$

Como P debe encontrarse también sobre la recta $y=-x+1$, será la solución del sistema:

$$\begin{cases} 8x-6y+29=0 \\ y=-x+1 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad x=-\frac{23}{14},\quad y=\frac{37}{14}$$

Ejercicio 8. *Calcular el centro de la circunferencia que pasa por los puntos* $A(-1,2)$, $B(5,3)$ *y* $C(3,-4)$.

Solución:

El centro equidista de los tres puntos. Puede calcularse como la intersección de la mediatriz de AB y de AC. La mediatriz de AB tiene por ecuación:

$$(x+1)^2+(y-2)^2 = (x+3)^2+(y-3)^2 \qquad\Longrightarrow\qquad 12x+2y-29=0$$

La mediatriz de AC es:

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = (x-3)^2 + (y+4)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad 2x - 3y - 5 = 0$$

El centro de la circunferencia es la solución del sistema:

$$\begin{cases} 12x + 2y - 29 = 0 \\ 2x - 3y - 5 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{97}{40}, \quad y = -\frac{1}{20}$$