

Ejercicio 1. Calcular el área del triángulo formado por la recta $2x - 5y + 20 = 0$ y los ejes de coordenadas.

Solución:

Calculamos la intersección de la recta con los ejes de coordenadas. La intersección con el eje OX es la solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x - 5y + 20 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \implies A(-10, 0)$$

y la intersección con el eje OY :

$$\begin{cases} 2x - 5y + 20 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \implies B(4, 0)$$

El área del triángulo es:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20$$

Ejercicio 2. Calcular en forma explícita la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(3, -1)$ y por el punto de intersección de las rectas $2x - y + 5 = 0$ e $y = 5x + 2$.

Solución:

Calculamos el punto de intersección de las dos rectas resolviendo el sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ y = 5x + 2 \end{cases} \implies B(1, 7)$$

Ahora calculamos la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(3, -1)$ y $B(1, 7)$. La pendiente es:

$$m_{AB} = \frac{7 - (-1)}{1 - 3} = -4$$

La ecuación en forma punto-pendiente es:

$$y + 1 = -4(x - 3)$$

Despejando y se obtiene la forma explícita:

$$y = -4x + 11$$

Ejercicio 3. Hallar la ecuación de una recta que corta a los ejes en segmentos de longitud igual y que pasa por el punto $P(6, 8)$.

Solución:

◇ Una manera de resolver el problema es utilizar la forma segmentaria de la recta:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

donde a y b son respectivamente la abscisa y la ordenada en el origen. Puesto que estos números deben ser iguales en valor absoluto, la ecuación de la recta debe tener la forma

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1 \quad \text{o bien} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{-a} = 1$$

Como la recta debe pasar por el punto $P(6, 8)$ se verifica:

$$\frac{6}{a} + \frac{8}{a} = 1 \implies a = 14 \quad \text{o bien} \quad \frac{6}{a} - \frac{8}{a} = 1 \implies a = -2$$

Así pues, las dos soluciones son:

$$\frac{x}{14} + \frac{y}{14} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{x}{-2} + \frac{y}{2} = 1$$

- ◊ Otra posibilidad es tener en cuenta que las rectas que determinan segmentos de longitud igual son las que tienen pendiente 1 o -1 (las que forman ángulos de 45° o 135° con el eje de abscisas). Las dos rectas son:

$$y - 8 = 1(x - 6) \quad \text{y} \quad y - 8 = -1(x - 6)$$

- ◊ Otra posibilidad es utilizar la forma punto-pendiente de la recta. Puesto que debe pasar por el punto $P(6, 8)$, a falta de determinar la pendiente, la ecuación de la recta es:

$$y - 8 = m(x - 6)$$

La abscisa en el origen de esta recta es

$$\begin{cases} y - 8 = m(x - 6) \\ y = 0 \end{cases} \implies a = 6 - \frac{8}{m}$$

y la ordenada en el origen:

$$\begin{cases} y - 8 = m(x - 6) \\ x = 0 \end{cases} \implies b = 8 - 6m$$

Estos dos números deben ser iguales en valor absoluto:

$$\left| 6 - \frac{8}{m} \right| = |8 - 6m| \implies \begin{cases} 6 - \frac{8}{m} = 8 - 6m \implies 6m^2 - 2m - 8 = 0 \\ 6 - \frac{8}{m} = -8 + 6m \implies 6m^2 - 14m + 8 = 0 \end{cases}$$

La primera ecuación tiene como soluciones $\frac{4}{3}$ y -1 . La segunda ecuación se verifica para $\frac{4}{3}$. Así pues tenemos tres soluciones:

$$y - 8 = -1(x - 6) \quad y - 8 = 1(x - 6) \quad y - 8 = \frac{4}{3}(x - 6)$$

Puede comprobarse que la última solución, que no habíamos encontrado anteriormente, es una recta que pasa por el origen y que, por lo tanto, determina con los ejes segmentos de longitud cero.

Ejercicio 4. Dados los puntos $A(2, 2)$ y $B(5, -2)$. Hallar un punto P del eje de abscisas tal que el triángulo APB sea rectángulo en P .

Solución:

Puesto que el punto P está en el eje de abscisas su ordenada es igual a cero. Sea $P(x, 0)$. Entonces:

$$m_{AP} = \frac{0 - 2}{x - 2} = \frac{-2}{x - 2}$$
$$m_{BP} = \frac{0 - (-2)}{x - 5} = \frac{2}{x - 5}$$

Estas dos pendientes deben cumplir la condición de perpendicularidad $1 + m_1 m_2 = 0$. Por consiguiente

$$1 + \frac{-2}{x - 2} \cdot \frac{2}{x - 5} = 0; \quad (x - 2)(x - 5) - 4 = 0; \quad x^2 - 7x + 6 = 0 \implies \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases}$$

Tenemos dos soluciones $P_1(1, 0)$ y $P_2(6, 0)$.

Ejercicio 5. Los puntos $A(3, 2)$, $B(4, 1)$ y $C(-3, 5)$ son vértices de un triángulo. Comprobar que la recta que pasa por los puntos medios de AB y AC es paralela al lado BC .

Solución:

La recta BC tiene de pendiente:

$$m_{BC} = \frac{5 - 1}{-3 - 4} = -\frac{4}{7}$$

Los puntos medios de AB y AC son los puntos $M\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$ y $N\left(0, \frac{7}{2}\right)$. La pendiente de la recta MN es:

$$m_{MN} = \frac{\frac{7}{2} - \frac{3}{2}}{0 - \frac{7}{2}} = \frac{\frac{4}{2}}{-\frac{7}{2}} = -\frac{4}{7}$$

Las dos pendientes coinciden. Por tanto las dos rectas son paralelas.

Ejercicio 6. Calcular la distancia entre las rectas paralelas $x + 2y + 4 = 0$ y $2x + 4y - 1 = 0$.

Solución:

- ◇ Basta obtener un punto de una recta y calcular la distancia a la otra. Por ejemplo, un punto de la primera recta es $P(0, -2)$. Su distancia a la segunda recta es:

$$d = \left| \frac{2 \cdot 0 + 4 \cdot (-2) - 1}{\sqrt{4 + 16}} \right| = \frac{9}{\sqrt{20}}$$

- ◇ También pueden escribirse las dos rectas con los mismos coeficientes de x e y :

$$2x + 4y + 8 = 0$$

$$2x + 4y - 1 = 0$$

y aplicar la fórmula:

$$d = \frac{|C - C'|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{8 - (-1)}{\sqrt{4 + 16}} = \frac{9}{\sqrt{20}}$$

Ejercicio 7. Dadas las rectas $3x + y - 1 = 0$, $2x + ky - 8 = 0$, determinar k para que formen un ángulo de 45° .

Solución:

La primera recta tiene pendiente $m_1 = -3$ y la segunda $m_2 = \frac{-2}{k}$. Aplicando la fórmula del ángulo de dos rectas:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| \implies 1 = \left| \frac{-3 + \frac{2}{k}}{1 + \frac{6}{k}} \right| = \left| \frac{2 - 3k}{6 + k} \right|$$

Tenemos dos soluciones:

$$\frac{2 - 3k}{6 + k} = 1 \implies 6 + k = 2 - 3k \implies k = -1$$

$$\frac{2 - 3k}{6 + k} = -1 \implies -6 - k = 2 - 3k \implies k = 4$$

Ejercicio 8. Hallar un punto de la recta $y = x + 3$ equidistante de la recta $3x - 4y + 3 = 0$ y del eje OX .

Solución:

Los puntos que equidistan de dos rectas se encuentran en sus bisectrices. Las ecuaciones de estas bisectrices son:

$$\left| \frac{3x - 4y + 3}{\sqrt{9 + 16}} \right| = |y| \implies \begin{cases} 3x - 4y + 3 = 5y \\ 3x - 4y + 3 = -5y \end{cases}$$

Así pues, las bisectrices son $x - 3y + 1 = 0$, y $3x + y + 3 = 0$.

El punto que buscamos se encuentra en la recta dada $y = x + 3$ y en una u otra bisectriz. Las soluciones se obtienen resolviendo los sistemas:

$$\begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ y = x + 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + y + 3 = 0 \\ y = x + 3 \end{cases}$$

Las soluciones son los puntos $P(-4, -1)$ y $Q(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$.

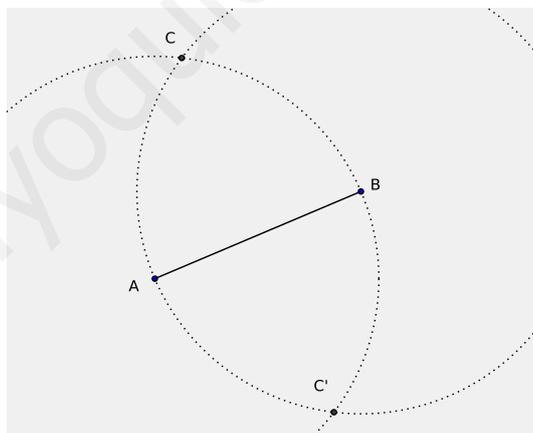
Ejercicio 9. Dos de los vértices de un triángulo equilátero son $A(-3, 1)$ y $B(5, 2)$. Calcular el tercer vértice.

Solución:

El lado del triángulo mide

$$l^2 = (5 - (-3))^2 + (2 - 1)^2 = 64 + 1 = 65$$

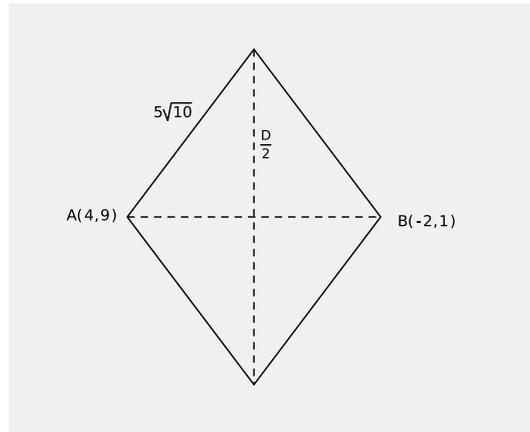
El tercer vértice es la intersección de la circunferencia de centro en A y que pasa por B , con la circunferencia con centro en B y que pasa por A . También podría obtenerse como la intersección de la mediatriz de AB con cualquiera de estas dos circunferencias. Entonces, el tercer vértice es la solución del sistema



$$\begin{cases} (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 65 \\ (x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 65 \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema son los puntos

$$C \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2}, \frac{3 - 8\sqrt{3}}{2} \right); \quad C' \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2}, \frac{3 + 8\sqrt{3}}{2} \right)$$



Ejercicio 10. El lado de un rombo mide $5\sqrt{10}$ y dos vértices opuestos son los puntos $A(4,9)$ y $B(-2,1)$. Calcular el área del rombo.

Solución:

Una de las diagonales mide:

$$d = \sqrt{(-2 - 4)^2 + (1 - 9)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$$

La otra diagonal puede obtenerse por el teorema de Pitágoras:

$$\frac{D}{2} = \sqrt{250 - 25} = 15 \implies D = 30$$

El área del rombo es:

$$S = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{30 \cdot 10}{2} = 150$$
