Ejercicio 1.

- ◇ *Calcular el punto medio del segmento de extremos* $A(5,-1)$ *y* $B(-4,3)$*.*
- ◇ *Calcular el punto simétrico de* $A(3,-1)$ *respecto de* $P(6,-3)$*.*

Solución:

- ◇ Sea $M(x,y)$ el punto medio. Sus coordenadas son:

$$X=\frac{5+(-4)}{2}=\frac{1}{2};\qquad y=\frac{-1+3}{2}=1$$

El punto medio es $M\left(\frac{1}{2},1\right)$

- ◇ Sea $A'(x',y')$ el simétrico de A respecto de P. Puesto que P es el punto medio de AA':

$$\begin{aligned}\frac{3+x'}{2}=6 \quad&\Longrightarrow\quad x'=9\\ \frac{-1+y'}{2}=-3\quad&\Longrightarrow\quad y'=-5\end{aligned}$$

El punto simétrico es $A'(9,-5)$.

Ejercicio 2. *Dados los puntos* $A(k,-1)$*,* $B(1,1)$ *y* $C(3,2)$*, calcular* k *de forma que los tres puntos estén alineados.*

Solución:

Si los tres puntos están alineados, la pendiente de AB debe ser igual a la pendiente de BC:

$$m_{AB}=m_{BC}\quad\Longrightarrow\quad\frac{1-(-1)}{1-k}=\frac{2-1}{3-1}\quad\Longrightarrow\quad\frac{2}{1-k}=\frac{1}{2}$$

y resolviendo esta ecuación resulta $k=-3$.

Ejercicio 3. *Calcular las ecuaciones implícita y segmentaria de la recta que pasa por el punto* $P(2,-2)$ *y cuya pendiente es* -3*.*

Solución:

La ecuación de la recta en la forma punto-pendiente es:

$$y+2=-3\,(x-2)$$

La ecuación implícita se obtiene pasando todos los sumandos al primer miembro:

$$3x+y-4=0$$

Las intersecciones de esta recta con los ejes de coordenadas son los puntos $A\left(\frac{4}{3},0\right)$ y $B(0,4)$. Por consiguiente, la ecuación segmentaria es:

$$\frac{x}{\frac{4}{3}}+\frac{y}{4}=1$$

Ejercicio 4. *Calcular las ecuaciones punto-pendiente y explícita de la recta que pasa por los puntos $A(-1,-2)$ y $B(0,5)$.*

Solución:

La pendiente de la recta es:

$$m = \frac{5-(-2)}{0-(-1)} = t$$

así que la ecuación punto -pendiente es:

$$y + 2 = 7\,(x+1)$$

Despejando y se obtiene la ecuación explícita:

$$y = 7x + 5$$

Ejercicio 5. *Dados los puntos $P(3,2)$ y $Q(-2,4)$, y la recta $r:\ y = 2x-3$ calcula la distancia:*

- ◇ *Entre P y Q.*
- ◇ *De P a r.*

Solución:

- ◇ La distancia entre los puntos P y Q es:

$$d(P,Q) = \sqrt{(-3-2)^2+(4-2)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$$

- ◇ Para calcular la distancia de P a r escribimos en primer lugar, la ecuación de r en forma implícita:

$$r: \quad 2x - y - 3 = 0$$

La distancia de P a $r$es:

$$d(P,r) = \left| \frac{2\cdot 3 - 2 - 3}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Ejercicio 6. *Calcular la tangente del ángulo agudo que forman las rectas $r:\ 3x-5y+6=0$ y $s:\ y = -2x+1$.*

Solución:

La primera recta tiene pendiente $m_1 = \frac{3}{5}$ y la segunda $m_2 = -2$. La tangente del ángulo agudo que forman es:

$$\operatorname{tg}\varphi = \left| \frac{\frac{3}{5}-(-2)}{1+\frac{3}{5}(-2)} \right| = \left| \frac{\frac{13}{5}}{-\frac{1}{5}} \right| = 13$$

Ejercicio 7. *¿Cuál ha de ser el valor de k para que las rectas $x+3y-2=0$ y $kx+2y+3=0$ sean paralelas? ¿Y para que sean perpendiculares?*

Solución:

- ◇ Para que sean paralelas debe verificarse que:

$$\frac{1}{k} = \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{2}{3}$$

- Para que sean perpendiculares:

$$1 \cdot k + 3 \cdot 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = -6$$

Ejercicio 8. *Calcular las ecuaciones de la paralela y la perpendicular a la recta $2x + 5y - 6 = 0$ por el punto $P(-1, 4)$.*

Solución:

La pendiente de la recta es $m = -\frac{-2}{5}$.

- La ecuación de la paralela es:

$$y - 4 = -\frac{2}{5}\,(x + 1)$$

- Y la ecuación de la perpendicular:

$$y - 4 = \frac{5}{2}\,(x + 1)$$

Ejercicio 9. *Calcular los vértices del triángulo cuyos lados están sobre las rectas:*

$$r:\ x - y - 2 = 0, \quad s:\ 2x + 3y - 9 = 0, \quad t:\ x = 0$$

Solución:

Basta resolver los tres sistemas de dos ecuaciones y dos incógnitas formados con estas ecuaciones para obtener los tres vértices:

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ 2x + 3y - 9 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \quad A(3, 1)$$

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \quad B(0, -2)$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - 9 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \quad C(0, 3)$$

Ejercicio 10. *Dados los puntos $B(-1, 3)$ y $C(2, -1)$ escribe la condición que deben cumplir las coordenadas del punto $A(x, y)$ para que el triángulo ABC sea rectángulo en A.*

Solución:

Resolveremos el problema por dos procedimientos:

- Si el triángulo es rectángulo en A los lados AB y AC son los catetos y el lado BC la hipotenusa. Si el punto A tiene de coordenadas x e y, por el teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}
&(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = (2 + 1)^2 + (-1 - 3)^2 \\
&x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 + x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 25 \\
&2x^2 + 2y^2 - 2x - 4y - 10 = 0 \\
&x^2 + y^2 - x - 2y - 5 = 0
\end{aligned}$$

◇ Si el triángulo es rectángulo en A, las rectas AB y AC son perpendiculares, sus pendientes deben cumplir la condición de perpendicularidad $1 + m_1 m_2 = 0$:

$$m_{AB} = \frac{y-3}{x+1}; \quad m_{AC} = \frac{y+1}{x-2}$$
$$1 + \frac{y-3}{x+1} \cdot \frac{y+1}{x-2} = 0$$
$$(x+1)(x-2) + (y-3)(y+1) = 0$$
$$x^2 + y^2 - x - 2y - 5 = 0$$

La condición que hemos obtenido es la ecuación de una circunferencia que tiene como diámetro el segmento BC.