Ejercicio 1. *Calcular el número real k de forma que*

$$\frac{(3-2i)^2}{1+ki}$$

sea:

- *Un número real.*
- *Un número imaginario puro.*

Solución:

Calculamos el cociente:

$$\frac{(3-2i)^2}{1+ki}=\frac{9-4-12i}{1+ki}=\frac{(5-12i)(1-ki)}{1+k^2}=\frac{5-12k+i(-5k-12)}{1+k^2}=\frac{5-12k}{1+k^2}+\frac{-5k-12}{1+k^2}i$$

- Si es un número real, la parte imaginaria debe ser cero:

$$\frac{-5k-12}{1+k^2}=0 \quad\Longrightarrow\quad k=-\frac{12}{5}$$

- Si es un número imaginario puro, la parte real sebe ser cero:

$$\frac{5-12k}{1+k^2}=0 \quad\Longrightarrow\quad k=\frac{5}{12}$$

Ejercicio 2. *Dados los números complejos $z=1-3i$, $w=-3+2i$, $t=-2i$ calcula*

$$\frac{2z-3t}{w}$$

Solución:

Sustituimos:

$$\frac{2z-3t}{w}=\frac{2\cdot(1-3i)-3\cdot(-2i)}{-3+2i}=\frac{2-6i+6i}{-3+2i}=\frac{2\cdot(-3-2i)}{9+4}=-\frac{6}{13}-\frac{4}{13}i$$

Ejercicio 3. *Calcular las raíces cuadradas del número complejo $-45-28i$.*

Solución:

Llamando $x+yi$ a la raíz debe cumplirse que $(x+yi)^2=-45-28i$. Igualando partes reales e imaginarias resulta el sistema:

$$\begin{cases} x^2-y^2=-45 \\ 2xy=28 \end{cases}$$

Despejando y en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera:

$$y=\frac{-14}{x};\qquad x^2-\frac{196}{x^2}=-45;\qquad x^4+45x^2-196=0$$

Despejando x^2:

$$x^2=\frac{-45\pm\sqrt{45^5+4\cdot196}}{2}=\frac{-45+53}{2}=4\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases} x=-2 \\ x=2 \end{cases}$$

Para $x = -2$, $y = 7$, y para $x = 2$, $y = -7$. Las dos raíces son, por tanto, $-2 + 7i$ y $2 - 7i$.

Ejercicio 4. *Escribe los siguientes números complejos en forma polar:*

- -4
- $2i$
- $-\frac{3}{4}i$
- $-2 + 2\sqrt{3}i$

Solución:

Para los tres primeros números la solución es inmediata:

- $-4 = 4_\pi$
- $2i = 2_{\pi/2}$
- $-\frac{3}{4}i = \left(\frac{3}{4}\right)_{3\pi/2}$
- El cuarto complejo tiene como módulo y argumento:

$$r = \sqrt{4+12} = 4; \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3} \quad \overset{\varphi \in II}{\Longrightarrow} \quad \varphi = 120^{\text{o}}$$

  Por consiguiente $-2 + 2\sqrt{3}i = 4_{2\pi/3}$.

Ejercicio 5. *Escribe en la forma binómica los siguientes números complejos:*

- $1_{\pi/2}$
- $5_{270^{\text{o}}}$
- $1_{150^{\text{o}}}$
- $4_{300^{\text{o}}}$

Solución:

- $1_{\pi/2} = i$
- $5_{270^{\text{o}}} = -5i$
- $1_{150^{\text{o}}} = 1 \cdot (\cos 150^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 150^{\text{o}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
- $4_{300^{\text{o}}} = 4 \cdot \cos 300^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 300^{\text{o}}) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2 - 2\sqrt{3}i$

Ejercicio 6. *Calcular en forma polar las raíces quintas de* $1 - i$.

Solución:

El módulo y argumento de $1 - i$ son:

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}; \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{-1}{1} = -1 \quad \overset{\varphi \in IV}{\Longrightarrow} \quad \varphi = 315^{\text{o}}$$

Asi que $1 - i = (\sqrt{2})_{315^{\text{o}}}$. La primera raíz la obtenemos haciendo la raíz del módulo y dividiendo por 5 el argumento:

$$z_1 = \left(\sqrt[10]{2}\right)_{63^{\text{o}}}$$

Las restantes raíces las calculamos sumando $\frac{360^{\text{o}}}{5} = 72^{\text{o}}$ a la anterior:

$$z_2 = \left(\sqrt[10]{2}\right)_{135^{\text{o}}}; \quad z_3 = \left(\sqrt[10]{2}\right)_{207^{\text{o}}}; \quad z_4 = \left(\sqrt[10]{2}\right)_{279^{\text{o}}}; \quad z_5 = \left(\sqrt[10]{2}\right)_{351^{\text{o}}}$$

Ejercicio 7. *Calcular en forma binómica las raíces sextas de* -1.

Solución:

El número -1 en forma polar es $1_{180^{\text{o}}}$. Como en el caso anterior, la primera raíz sexta se obtiene haciendo la raíz sexta del módulo y dividiendo por 6 el argumento. Las restantes raíces se calculan sumando $\frac{360^{\text{o}}}{6} = 60^{\text{o}}$ al argumento se la raíz anterior:

$$\begin{aligned}
z_1 &= \cos 30^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 30^{\text{o}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\
z_2 &= \cos 90^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 90^{\text{o}} = i \\
z_3 &= \cos 150^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 150^{\text{o}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\
z_4 &= \cos 210^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 210^{\text{o}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \\
z_5 &= \cos 270^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 270^{\text{o}} = -i \\
z_6 &= \cos 330^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 330^{\text{o}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i
\end{aligned}$$

Ejercicio 8. *Calcula en forma binómica* $(-1 - i\sqrt{3})^6$.

Solución:

En primer lugar escribimos el complejo en forma polar:

$$r = \sqrt{1+3} = 2: \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3} \quad \overset{\varphi \in III}{\Longrightarrow} \quad \varphi = 240^{\text{o}}$$

Por consiguiente:

$$(-1 - i\sqrt{3})^6 = \left[(2)_{240^{\text{o}}}\right]^6 = 64_{1440^{\text{o}}}$$

Dividiendo el argumento por 360^{o} encontramos el argumento equivalente 0^{o}. Tenemos, por tanto:

$$64_{1440^{\text{o}}} = 64_{0^{\text{o}}} = 64$$

Ejercicio 9. *Calcula una expresión de* $\cos 3\varphi$ *a partir de la fórmula de Moivre.*

Solución:

Para el ángulo triple, la fórmula de Moivre tiene la forma:

$$\cos 3\varphi + i \operatorname{sen} \varphi = (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)^3$$

Para calcular $\cos 3\varphi$ debemos calcular la parte real del segundo miembro. La parte real es la que contiene las potencias 0 y 2 de la unidad imaginaria:

$$(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)^3 = \cos^3 \varphi + 3i \cos^2 \varphi \operatorname{sen} \varphi + 3i^2 \cos \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi + i^3 \operatorname{sen}^3 \varphi$$

La parte real es

$$\cos^3 \varphi + 3i^2 \cos \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi$$

de modo que:

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\operatorname{sen}^2\varphi$$

Ejercicio 10. *El punto $A_1(3,5)$ es un vértice de un triángulo equilátero centrado en el origen. Calcular las coordenadas de los otros dos vértices A_2 y A_3.*

Solución:

Los otros dos vértices los obtendremos girando A_1 ángulos de 120º y 240º alrededor del origen:

$$\begin{aligned}
(3+5i)(\cos 120^{\text{o}} + i\operatorname{sen}120^{\text{o}}) &= (3+5i)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\
&= -\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i-\frac{5}{2}i-\frac{5\sqrt{3}}{2}\\
&= -\frac{3}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{2}\right)i\\
(3+5i)(\cos 240^{\text{o}} + i\operatorname{sen}240^{\text{o}}) &= (3+5i)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\
&= -\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i-\frac{5}{2}i+\frac{5\sqrt{3}}{2}\\
&= -\frac{3}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{2}\right)i
\end{aligned}$$

Los puntos son:

$$A_2\left(-\frac{3}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{2}\right); \qquad A_3\left(-\frac{3}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{2}\right)$$
