**Ejercicio 1.** *Calcular el número real $k$ de forma que*

$$\frac{(3-2i)^2}{1+ki}$$

sea:

- ◇ *Un número real.*
- ◇ *Un número imaginario puro.*

**Solución:**

Calculamos el cociente:

$$\frac{(3-2i)^2}{1+ki} = \frac{9-4-12i}{1+ki} = \frac{(5-12i)(1-ki)}{1+k^2} = \frac{5-12k+i(-5k-12)}{1+k^2} = \frac{5-12k}{1+k^2} + \frac{-5k-12}{1+k^2}i$$

- ◇ Si es un número real, la parte imaginaria debe ser cero:

$$\frac{-5k-12}{1+k^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = -\frac{12}{5}$$

- ◇ Si es un número imaginario puro, la parte real sebe ser cero:

$$\frac{5-12k}{1+k^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{5}{12}$$

---

**Ejercicio 2.** *Dados los números complejos $z = 1-3i$, $w = -3+2i$, $t = -2i$ calcula*

$$\frac{2z-3t}{w}$$

**Solución:**

Sustituimos:

$$\frac{2z-3t}{w} = \frac{2\cdot(1-3i)-3\cdot(-2i)}{-3+2i} = \frac{2-6i+6i}{-3+2i} = \frac{2\cdot(-3-2i)}{9+4} = -\frac{6}{13} - \frac{4}{13}i$$

---

**Ejercicio 3.** *Calcular las raíces cuadradas del número complejo $-45-28i$.*

**Solución:**

Llamando $x+yi$ a la raíz debe cumplirse que $(x+yi)^2 = -45-28i$. Igualando partes reales e imaginarias resulta el sistema:

$$\begin{cases} x^2-y^2 = -45 \\ 2xy = 28 \end{cases}$$

Despejando $y$ en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera:

$$y = \frac{-14}{x}; \qquad x^2 - \frac{196}{x^2} = -45; \qquad x^4 + 45x^2 - 196 = 0$$

Despejando $x^2$:

$$x^2 = \frac{-45 \pm \sqrt{45^5 + 4\cdot 196}}{2} = \frac{-45+53}{2} = 4 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Para $x = -2$, $y = 7$, y para $x = 2$, $y = -7$. Las dos raíces son, por tanto, $-2 + 7i$ y $2 - 7i$.

---

**Ejercicio 4.** *Escribe los siguientes números complejos en forma polar:*

- $-4$
- $2i$
- $-\frac{3}{4}i$
- $-2 + 2\sqrt{3}i$

**Solución:**

Para los tres primeros números la solución es inmediata:

- $-4 = 4_{\pi}$
- $2i = 2_{\pi/2}$
- $-\frac{3}{4}i = \left(\frac{3}{4}\right)_{3\pi/2}$
- El cuarto complejo tiene como módulo y argumento:

  $$r = \sqrt{4+12} = 4; \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3} \quad \overset{\varphi \in II}{\Longrightarrow} \quad \varphi = 120^{\mathrm{o}}$$

  Por consiguiente $-2 + 2\sqrt{3}i = 4_{2\pi/3}$.

---

**Ejercicio 5.** *Escribe en la forma binómica los siguientes números complejos:*

- $1_{\pi/2}$
- $5_{270^{\mathrm{o}}}$
- $1_{150^{\mathrm{o}}}$
- $4_{300^{\mathrm{o}}}$

**Solución:**

- $1_{\pi/2} = i$
- $5_{270^{\mathrm{o}}} = -5i$
- $1_{150^{\mathrm{o}}} = 1 \cdot (\cos 150^{\mathrm{o}} + i \operatorname{sen} 150^{\mathrm{o}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
- $4_{300^{\mathrm{o}}} = 4 \cdot \cos 300^{\mathrm{o}} + i \operatorname{sen} 300^{\mathrm{o}}) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2 - 2\sqrt{3}i$

---

**Ejercicio 6.** *Calcular en forma polar las raíces quintas de* $1 - i$.

**Solución:**

El módulo y argumento de $1 - i$ son:

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}; \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{-1}{1} = -1 \quad \overset{\varphi \in IV}{\Longrightarrow} \quad \varphi = 315^{\mathrm{o}}$$

Asi que $1 - i = (\sqrt{2})_{315^{\mathrm{o}}}$. La primera raíz la obtenemos haciendo la raíz del módulo y dividiendo por 5 el argumento:

$$z_1 = \left(\sqrt[10]{2}\right)_{63^{\mathrm{o}}}$$

Las restantes raíces las calculamos sumando $\frac{360^{\circ}}{5} = 72^{\circ}$ a la anterior:

$$z_2 = \left(\sqrt[10]{2}\right)_{135^{\circ}}\ ; \quad z_3 = \left(\sqrt[10]{2}\right)_{207^{\circ}}\ ; \quad z_4 = \left(\sqrt[10]{2}\right)_{279^{\circ}}\ ; \quad z_5 = \left(\sqrt[10]{2}\right)_{351^{\circ}}$$

---

**Ejercicio 7.** *Calcular en forma binómica las raíces sextas de* $-1$.

**Solución:**

El número $-1$ en forma polar es $1_{180^{\circ}}$. Como en el caso anterior, la primera raíz sexta se obtiene haciendo la raíz sexta del módulo y dividiendo por 6 el argumento. Las restantes raíces se calculan sumando $\frac{360^{\circ}}{6} = 60^{\circ}$ al argumento se la raíz anterior:

$$\begin{aligned}
z_1 &= \cos 30^{\circ} + i \operatorname{sen} 30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\
z_2 &= \cos 90^{\circ} + i \operatorname{sen} 90^{\circ} = i \\
z_3 &= \cos 150^{\circ} + i \operatorname{sen} 150^{\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\
z_4 &= \cos 210^{\circ} + i \operatorname{sen} 210^{\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \\
z_5 &= \cos 270^{\circ} + i \operatorname{sen} 270^{\circ} = -i \\
z_6 &= \cos 330^{\circ} + i \operatorname{sen} 330^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i
\end{aligned}$$

---

**Ejercicio 8.** *Calcula en forma binómica* $(-1 - i\sqrt{3})^6$.

**Solución:**

En primer lugar escribimos el complejo en forma polar:

$$r = \sqrt{1+3} = 2 : \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3} \overset{\varphi \in III}{\Longrightarrow} \quad \varphi = 240^{\circ}$$

Por consiguiente:

$$(-1 - i\sqrt{3})^6 = \left[(2)_{240^{\circ}}\right]^6 = 64_{1440^{\circ}}$$

Dividiendo el argumento por $360^{\circ}$ encontramos el argumento equivalente $0^{\circ}$. Tenemos, por tanto:

$$64_{1440^{\circ}} = 64_{0^{\circ}} = 64$$

---

**Ejercicio 9.** *Calcula una expresión de* $\cos 3\varphi$ *a partir de la fórmula de Moivre.*

**Solución:**

Para el ángulo triple, la fórmula de Moivre tiene la forma:

$$\cos 3\varphi + i \operatorname{sen} \varphi = (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)^3$$

Para calcular $\cos 3\varphi$ debemos calcular la parte real del segundo miembro. La parte real es la que contiene las potencias 0 y 2 de la unidad imaginaria:

$$(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)^3 = \cos^3 \varphi + 3i \cos^2 \varphi \operatorname{sen} \varphi + 3i^2 \cos \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi + i^3 \operatorname{sen}^3 \varphi$$

La parte real es

$$\cos^3 \varphi + 3i^2 \cos \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi$$

de modo que:

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\,\mathrm{sen}^2\,\varphi$$

---

**Ejercicio 10.** *El punto $A_1(3,5)$ es un vértice de un triángulo equilátero centrado en el origen. Calcular las coordenadas de los otros dos vértices $A_2$ y $A_3$.*

**Solución:**

Los otros dos vértices los obtendremos girando $A_1$ ángulos de 120º y 240º alrededor del origen:

$$\begin{aligned}
(3+5i)(\cos 120^{\text{o}} + i\,\mathrm{sen}\,120^{\text{o}}) &= (3+5i)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\
&= -\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i-\frac{5}{2}i-\frac{5\sqrt{3}}{2}\\
&= -\frac{3}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{2}\right)i\\
(3+5i)(\cos 240^{\text{o}} + i\,\mathrm{sen}\,240^{\text{o}}) &= (3+5i)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\
&= -\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i-\frac{5}{2}i+\frac{5\sqrt{3}}{2}\\
&= -\frac{3}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{2}\right)i
\end{aligned}$$

Los puntos son:

$$A_2\left(-\frac{3}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{2}\right);\qquad A_3\left(-\frac{3}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2},-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{2}\right)$$

---