Ejercicio 1. *Marcar como* V *(verdadera) o* F *(falsa) cada una de las afirmaciones siguientes:*

1. La parte imaginaria de un número real es cero.
2. El conjugado de z tiene la misma parte real que z.
3. El producto de un complejo por su conjugado es un número imaginario puro.
4. El producto de un complejo por su conjugado es igual al módulo del complejo.
5. El inverso de i es $-i$.
6. Los números imaginarios puros tienen como argumento $\pi/2$.
7. El módulo de i es 1.
8. El argumento de un número real negativo es π.
9. La potencia 18 de i es -1.
10. La potencia 37 de i es $-i$.
11. La raíz cuadrada de $3-4i$ tiene de módulo 5.
12. Todas las raíces cúbicas de un complejo tienen el mismo módulo.
13. Para multiplicar dos números complejos se multiplican sus partes reales e imaginarias.
14. Para multiplicar dos complejos se multiplican sus módulos y sus argumentos.
15. Sea $z' = zi$. El módulo de z' es igual al módulo de z.
16. Sea $z' = zi$. Los argumentos de z' y z difieren en $\pi/2$.
17. El argumento de $-3i$ es $\pi/2$.
18. Si elevamos un complejo al cuadrado, su argumento se multiplica por 2.
19. Los argumentos de las raíces sextas de un complejo difieren en un múltiplo de $\pi/3$.
20. Una raíz cúbica de -8 tiene de argumento $\pi/6$.

Solución:

Son verdaderas las afirmaciones 1, 2, 5, 7, 8, 9, 12, 15, 16, 18 y 19.

Ejercicio 2. *Calcular:*

$$\frac{(5-2i)^2(3-4i)}{2-5i}$$

Solución:

En primer lugar, calculamos el cuadrado:

$$\frac{(5-2i)^2(3-4i)}{2-5i} = \frac{(25-4-20i)(3-4i)}{2-5i} = \frac{(21-20i)(3-4i)}{2-5i}$$

Calculamos e producto del numerador

$$\frac{(21-20i)(3-4i)}{2-5i} = \frac{63-84i-60i+80i^2}{2-5i} = \frac{-17-144i}{2-5i}$$

Para calcular el cociente, muultiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{-17-144i}{2-5i}=\frac{(-17-144i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)}=\frac{686-373i}{29}=\frac{686}{29}-\frac{373}{29}i$$

Ejercicio 3. *Calcular* $(1-\sqrt{3}i)^{10}$ *y expresar el resultado en forma binómica.*

Solución:

En primer lugar pasamos el complejo a la forma trigonométrica. El módulo vale:

$$r=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=2$$

y el argumento:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{-\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3}\quad(\varphi\in\text{IV cuadrante})\quad\Longrightarrow\quad\varphi=300^{\text{o}}$$

Entonces:

$$[2(\cos 300^{\text{o}}+i\operatorname{sen}300^{\text{o}})]^{10}=2^{10}(\cos 3000^{\text{o}}+i\operatorname{sen}3000^{\text{o}})=2^{10}(\cos 120^{\text{o}}+i\operatorname{sen}120^{\text{o}})$$

donde hemos sustituido el argumento de 300^{o} por el argumento equivalente de 120^{o}. Para calcular la forma binómica sustituimos el seno y el coseno de 120^{o} por su valor:

$$2^{10}(\cos 120^{\text{o}}+i\operatorname{sen}120^{\text{o}})=1024\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-512+512\sqrt{3}i$$

Ejercicio 4. *Calcular en forma binómica la raíz cuadrada de* $16-30i$.

Solución:

Podemos pasar a la forma polar para calcular la raíz y después pasar a la forma binómica, pero podemos también calcular la raíz directamente en la forma binómica. Supongamos que la raíz es $x+yi$. Entonces:

$$\sqrt{16-30i}=x+yi\quad\Longrightarrow\quad 16-30i=(x+yi)^2$$

Desarrololando el cuadrado e igualando partes reales e imaginarias obtenemos:

$$\begin{cases}x^2-y^2=16\\2xy=-30\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}x^2-y^2=16\\xy=-15\end{cases}$$

Despejando y de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera resulta:

$$y=\frac{-15}{x};\qquad x^2-\frac{225}{x^2}=16$$

Quitando denominadores y resolviendo la ecuación:

$$x^4-16x^2-225=0\quad\Longrightarrow\quad x^2=\frac{16\pm\sqrt{256+900}}{2}=\frac{16\pm 34}{2}$$

Las solución con el signo menos no es válida (x^2 debe ser positivo) de forma que obtenemos $x^2=25$ y $x_1=-5$ y $x_2=5$. Las soluciones son:

$$x_1=-5\quad\Longrightarrow\quad y_1=\frac{-15}{-5}=3$$

$$x_2=5\quad\Longrightarrow\quad y_2=\frac{-15}{5}=-3$$

y las raíces son por tanto, $-5+3i$ y $5-3i$.

Ejercicio 5. *Calcular las raíces cúbicas de i.*

Solución:

El número i tiene de módulo 1 y como argumentos $90^{\text{o}}+360^{\text{o}}k$ con k entero. Las raíces cúbicas son:

$$\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{90^{\text{o}}+360^{\text{o}}k}{3}+i\operatorname{sen}\frac{90^{\text{o}}+360^{\text{o}}k}{3}\right); \qquad k=0,1,2$$

Sustituyendo los valores de k obtenemos:

$$z_1=\cos 30^{\text{o}}+i\operatorname{sen}30^{\text{o}}$$
$$z_2=\cos 150^{\text{o}}+i\operatorname{sen}150^{\text{o}}$$
$$z_3=\cos 270^{\text{o}}+i\operatorname{sen}270^{\text{o}}$$

Aunque no lo pide el problema, podemos expresar las tres raíces en forma binómica:

$$z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$
$$z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$
$$z_3=-i$$
