Ejercicio 1 *Escribe la ecuación implícita de la recta que pasa por los puntos $P(3,-1)$ y $Q(2,-4)$.*

Solución:

La pendiente de la recta es:

$$m = \frac{-4-(-1)}{2-3} = \frac{-3}{-1} = 3$$

así que la ecuacion en forma punto-pendiente es:

$$y+1 = 3\,(x-3)$$

Pasando todos los términos al primer miembro obtenemos la ecuación implícita:

$$3x - y - 10 = 0$$

Ejercicio 2 *Calcula en forma implícita la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2,-3)$ y es perpendicular a $y = \frac{2}{5}\,x + 1$.*

Solución:

Puesto que la recta dada tiene pendiente $\frac{2}{5}$, la perpendicular tiene de pendiente $-\frac{5}{2}$. La ecuación de la perpendicular en la forma punto-pendiente es:

$$y+3 = -\frac{5}{2}\,(x-2)$$

Quitando denominadores y pasando al primer miembro se obtiene la ecuación implícita:

$$5x + 2y - 4 = 0$$

Ejercicio 3 *Calcular el ángulo que forma con el eje de abscisas la mediatriz del segmento de extremos $A(-1,2)$, $B(-5,7)$.*

Solución:

La mediatriz tiene de ecuación:

$$(x+1)^2+(y-2)^2 = (x+5)^2+(y-7)^2 \quad\Longrightarrow\quad 2x+1-4y+4 = 10x+25-14y+49 \quad\Longrightarrow\quad 8x-10y+69 = 0$$

Esta recta tiene de pendiente $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$. El ángulo con el eje de abscisas es:

$$\text{artg}\,\frac{4}{5} = 38^{\text{o}}39'35''$$

Ejercicio 4 *Determina los puntos P y Q que dividen el segmento de extremos $A(-2,1)$ y $B(5,4)$, en tres partes iguales.*

Solución:

Los puntos son:

$$x_1 = \frac{2\cdot(-2)+5}{3} = \frac{1}{3}\,; \quad y_1 = \frac{2\cdot 1+4}{3} = 2; \quad P_1\left(\frac{1}{3},2\right)$$

$$x_2 = \frac{-2+2\cdot 5}{3} = \frac{8}{3}\,; \quad y_2 = \frac{1+2\cdot 4}{3} = 3; \quad P_2\left(\frac{8}{3},3\right)$$

Ejercicio 5 *Escribe la ecuación implícita de la recta que pasa por* $P(-1,2)$ *y es paralela a* $3x-y+4=0$.

Solución:

La recta dada tiene pendiente $m=3$. La paralela tendrá también pendiente 3 y, como además pasa por el punto $P(-1,2)$, su ecuación en la forma punto-pendiente es:

$$y-2=3\,(x+1)$$

y en forma implícita:

$$3x-y+5=0$$

Otra forma de resolver este problema es la siguiente: puesto que las rectas deben ser paralelas, os coeficientes A y B de la ecuación implícita deben ser proporcionales. Tomémoslos iguales y calculemos C de modo que la recta contenga al punto dado:

$$P\in 3x-y+C=0 \quad\Longrightarrow\quad 3\cdot(-1)-2+C=0 \quad\Longrightarrow\quad C=5$$

Y, por tanto, la recta buscada es $3x-y+5=0$.

Ejercicio 6 *Calcula el punto de corte con el eje de abscisas de la paralela a* $3x-2y+5=0$ *por el punto* $P(-3,-2)$

Solución:

Procediendo como en el problema anterior se encuentra que la paralela es la misma recta $3x-2y+5=0$. El corte con el eje de abscisas es:

$$\begin{cases} 3x-2y+5=0 \\ y=0 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad A\left(-\frac{5}{3},0\right)$$

Ejercicio 7 *Calcula* c *para que la distancia entre las rectas* $4x+3y-6=0$ *y* $4x+3y+c=0$ *sea igual a* 3.

Solución:

Tomemos un punto cualquiera de la primera recta, por ejemplo $P(0,2)$. Si la distancia de este punto a la segunda recta es 3:

$$3=\left|\frac{4\cdot 0+3\cdot 2+c}{\sqrt{9+16}}\right|=\frac{|6+c|}{5} \quad\Longrightarrow\quad |6+c|=15$$

ecuación que tiene dos soluciones:

$$\begin{aligned} 6+c=15 &\quad\Longrightarrow\quad c=9 \\ 6+c=-15 &\quad\Longrightarrow\quad c=-21 \end{aligned}$$

En general, puede verse que la distancia entre dos rectas paralelas $Ax+By+C=0$ y $Ax+By+C'=0$ es:

$$d=\frac{|C-C'|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Ejercicio 8 *Calcular el ortocentro del triángulo de vértices $A(2,0)$, $B(0,1)$ y $C(-3,-2)$.*

Solución:

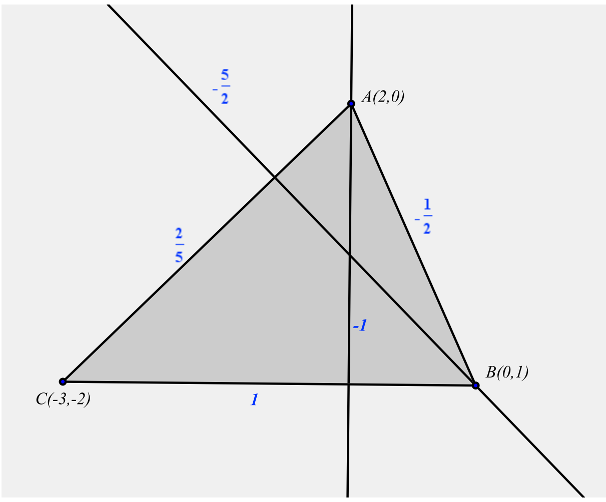

Figura 2: Pendientes de los lados a las alturas

En la figura 2 se han representado las pendientes de los lados del triángulo y de las alturas h_A y h_B. Las ecuaciones de estas alturas son:

$$h_A : \; y = -1\,(x-2)$$
$$h_B : \; y - 1 = -\,\frac{5}{2}\,x$$

resolviendo el sistema formado por estas ecuaciones se obtiene el ortocentro $H\left(-\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$

Ejercicio 9 *Halla los puntos del eje de abscisas que equidistan de las rectas* $4x+3y+6=0$ *y* $3x+4y-9=0$.

Solución: Los puntos que equidistan de las dos rectas se encuentran en su bisectriz:

$$\frac{4x+3y+6=0}{\sqrt{16+25}} = \pm\frac{3x+4y-9=0}{\sqrt{16+25}} \quad\Longrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} x-y+15=0 \\ 7x+7y-3=0 \end{array}\right.$$

Los puntos buscados deben estar en el eje de abscisas. Son entonces las intersecciones de las bisectrices con $y=0$:

$$\left\{\begin{array}{l} x-y+15=0 \\ y=0 \end{array}\right. \quad\Longrightarrow\quad A_1(-15,0); \qquad \left\{\begin{array}{l} 7x+7y-3=0 \\ y=0 \end{array}\right. \quad\Longrightarrow\quad A_2\left(\frac{3}{7},0\right)$$

Ejercicio 10 *En el triángulo ABC conocemos el vértice $A(-2,3)$, la ecuación de la altura que parte de C, $h_C :\; 3x-2y-8=0$ y la ecuación del lado BC; $y=3x-13$. Hallar los vértices B y C.* **Solución:**

El vértice C es la intersección del lado BC y la altura dada:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x-2y-8=0 \\ y=3x-13 \end{array}\right. \quad\Longrightarrow\quad C(6,5)$$

Para calcular el vértice B calculamos en primer lugar la ecuación del lado AB. Puesto que la altura h_C es perpendicular a AB y tiene de pendiente $\frac{3}{2}$, el lado AB tendrá de pendiente $-\frac{2}{3}$, de forma que su ecuación es (ver figura 3):

$$y-3 = -\frac{2}{3}\,(x+2) \quad\Longrightarrow\quad 2x+3y-5=0$$

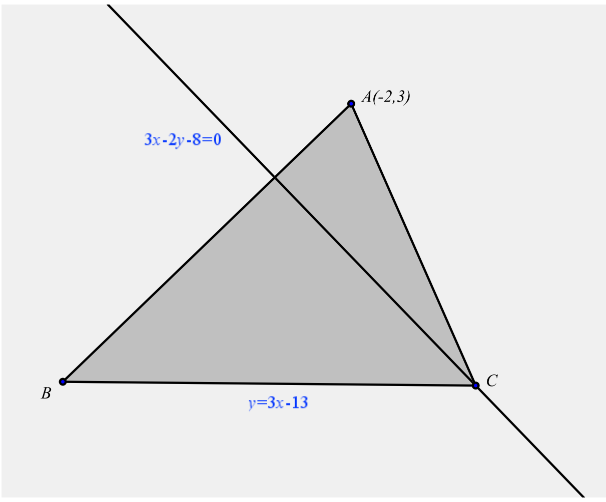

Figura 3: EJERCICIO 10

El vértice B es la intersección de los lados AB y BC:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 3x - 13 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \quad B(4, -1)$$