Ejercicio 1 *(1,5 pt) Calcular:*

$$\frac{(2-i)^2+(1+i)^2}{1+3i}$$

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{(2-i)^2+(1+i)^2}{1+3i} &= \frac{4-4i+i^2+1+2i+i^2}{1+3i}\\ &= \frac{3-2i}{1+3i}\\ &= \frac{(3-2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}\\ &= \frac{3-9i-2i-6i^2}{1+9}\\ &= -\frac{3}{10}-\frac{11}{10}i\end{aligned}$$

Ejercicio 2 *(1 pt) ¿Cuánto debe valer x para que $(25-xi)^2$ sea imaginario puro?*

Solución:

$$(25-xi)^2 = 625-50xi+x^2i^2 = 625-x^2-50xi$$

Puesto que el número debe ser imaginario puro la parte real debe ser igual a cero:

$$625-x^2=0 \quad\Longrightarrow\quad x=\pm\sqrt{625}=\pm 25$$

Ejercicio 3 *(1,5 pt) Escribe en forma binómica los siguientes números complejos:*

1. $5_{\pi/6}$
2. $2_{135^{\text{o}}}$
3. $5_{180^{\text{o}}}$
4. $2_{495^{\text{o}}}$

Solución:

$$5_{\pi/6} = 5\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\right) = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i$$

$$2_{135^{\text{o}}} = 2\left(\cos 135^{\text{o}}+i\,\mathrm{sen}\,135^{\text{o}}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\sqrt{2}+\sqrt{2}i$$

$$5_{180^{\text{o}}} = -5$$

$$2_{495^{\text{o}}} = 2_{135^{\text{o}}} = -\sqrt{2}+\sqrt{2}i$$

Ejercicio 4 *(1,5 pt) Calcular*

$$\frac{8}{(1-i)^5}$$

Solución:

Pasamos numerador y denominador a la forma polar:

$$8 = 8_{0^{\text{o}}}$$
$$1 - i = \left(\sqrt{2}\right)_{315^{\text{o}}}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
[\frac{8}{(1-i)^5} &= \frac{8_{0^{\text{o}}}}{\left(\sqrt{32}\right)_{5\times 315^{\text{o}}}} \\
&= \frac{8_{0^{\text{o}}}}{\left(4\sqrt{2}\right)_{1575^{\text{o}}}} \\
&= \frac{8_{0^{\text{o}}}}{\left(4\sqrt{2}\right)_{135}} \\
&= \left(\sqrt{2}\right)_{-135^{\text{o}}} \\
&= \left(\sqrt{2}\right)_{225^{\text{o}}}
\end{aligned}$$

Ejercicio 5 *(1,5 pt) Calcula las raíces cuartas de* $1 - \sqrt{3}i$*.*

Solución:

El módulo y argumento de este complejo son:

$$r = \sqrt{1+3} = 2$$
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3} \quad \stackrel{\varphi\in IV}{\Longrightarrow} \quad \varphi = 300^{\text{o}}$$

Entonces:

$$\sqrt[4]{1-\sqrt{3}i} = \sqrt[4]{(2)_{300}} = \left(\sqrt[4]{2}\right)_{\frac{300^{\text{o}}+360^{\text{o}}k}{4}}$$

Dando a k los valores 0, 1, 2 y 3 obtenemos las cuatro raíces cuartas:

$$\left(\sqrt[4]{2}\right)_{75^{\text{o}}}, \quad \left(\sqrt[4]{2}\right)_{165^{\text{o}}}, \quad \left(\sqrt[4]{2}\right)_{255^{\text{o}}}, \quad \left(\sqrt[4]{2}\right)_{345^{\text{o}}}$$

Ejercicio 6 *(1 pt) Sean*

$$z_1 = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^4, \qquad z_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3, \qquad z_3 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$$

Calcula $z_1z_2z_3$ *y exprésalo en forma binómica.*

Solución:

Primero expresaremos los tres complejos en forma polar para hacer las potencias y el producto y después pasaremos a la forma binómica:

$$1 + i\sqrt{3} = 2_{60^{\text{o}}}, \qquad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1_{300^{\text{o}}}, \qquad -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1_{240^{\text{o}}}$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 z_3 &= \left(1+i\sqrt{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 \\
&= \left(2_{60^\mathrm{o}}\right)^4 \cdot \left(1_{300^\mathrm{o}}\right)^3 \cdot \left(1_{240^\mathrm{o}}\right)^3 \\
&= 16_{240^\mathrm{o}} \cdot 1_{900^\mathrm{o}} \cdot 1_{720^\mathrm{o}} \\
&= 16_{1860^\mathrm{o}} \\
&= 16_{60^\mathrm{o}} \\
&= 16\left(\cos 60^\mathrm{o} + i \operatorname{sen} 60^\mathrm{o}\right) \\
&= 8 + 8\sqrt{3}i
\end{aligned}
$$

Ejercicio 7 *(1 pt) El número complejo 3_{40^o} es el vértice de un pentágono regular centrado en el origen. Halla los otros vértices y el número complejo cuyas raíces quintas son esos vértices.*

Solución:

Puesto que el pentágono está centrado en el origen, los vértices del pentágono representan complejos del mismo módulo y argumentos que difieren en $360^\mathrm{o}/5 = 72^\mathrm{o}$.

Los vértices son:

$$3_{40^\mathrm{o}}, \quad 3_{112^\mathrm{o}}, \quad 3_{184^\mathrm{o}}, \quad 3_{256^\mathrm{o}}, \quad 3_{328^\mathrm{o}}$$

Estos números son raíces quintas de un número complejo que puede obtenerse elevando a 5 uno cualquiera de ellos:

$$\sqrt[5]{z} = 3_{40^\mathrm{o}} \quad \Longrightarrow \quad z = \left(3_{40^\mathrm{o}}\right)^5 = 243_{200^\mathrm{o}}$$

Ejercicio 8 *(1 pt) Escribe la condición que verifican todos los números complejos cuyos afijos están en la circunferencia de centro $(1,1)$ y radio 3.*

Solución:

La distancia entre los afijos de dos complejos es igual al módulo de su diferencia:

$$d(z,z') = |z-z'|$$

La circunferencia está formada por los puntos que se encuentran a distancia 3 de $1+i$. Por consiguiente todos los puntos de la circunferencia cumplen que:

$$|z-1-i| = 3$$
