

Ejercicio 1 Dados los números complejos $z = 1 - 3i$, $w = -3 + 2i$, $t = -2i$ calcula $\frac{2z - 3t}{w}$

Solución:

$$\frac{2z - 3t}{w} = \frac{2(1 - 3i) - 3(-2i)}{-3 + 2i} = \frac{2 - 6i + 6i}{-3 + 2i} = \frac{2}{-3 + 2i}$$

Multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{2z - 3t}{w} = \frac{2(-3 - 2i)}{(-3 + 2i)(-3 - 2i)} = \frac{-6 - 4i}{9 + 4} = \frac{-6}{13} - \frac{4}{13}i$$

Ejercicio 2 Dados los complejos $2 - ai$ y $3 - bi$, halla a y b para que su producto sea igual a $8 - 4i$.

Solución:

Multiplicamos los dos complejos:

$$(2 - ai)(3 - bi) = 6 - 2bi - 3ai + abi^2 = 6 - ab + (-3a - 2b)i$$

Como este complejo debe ser igual a $8 - 4i$, igualando parte real e imaginaria resulta el sistema:

$$\begin{cases} 6 - ab = 8 \\ -3a - 2b = -4 \end{cases} \implies \begin{cases} ab = -2 \\ 3a + 2b = 4 \end{cases}$$

resolviendo este sistema se obtienen las dos soluciones:

$$a = 2, b = -1 \quad y \quad a = -\frac{2}{3}, b = 3$$

Ejercicio 3 Escribe los siguientes números complejos en forma polar:

1. -4

2. $2i$

3. $-\frac{3}{4}i$

4. $-2 + 2\sqrt{3}i$

Solución:

Los tres primeros son:

$$-4 = 4_{180^\circ}$$

$$2i = 2_{90^\circ}$$

$$-\frac{3}{4}i = \left(\frac{3}{4}\right)_{270^\circ}$$

Para el cuarto calculamos el módulo y el argumento:

$$r = \sqrt{4 + 12} = 4$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3} \implies \varphi = 120^\circ \quad (\varphi \text{ en el segundo cuadrante})$$

Por consiguiente:

$$-2 + 2\sqrt{3}i = 4_{120^\circ}$$

Ejercicio 4 Escribe en la forma binómica los siguientes números complejos:

1. $1_{\pi/2}$

2. 5_{270°

3. 1_{150°

4. 4_{100°

Solución:

$$1_{\pi/2} = i$$

$$5_{270^\circ} = -5i$$

$$1_{150^\circ} = 1 \cdot (\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$4_{100^\circ} = 4 \cdot (\cos 100^\circ + i \operatorname{sen} 100^\circ) = 4 \cos 100^\circ + 4 \operatorname{sen} 100^\circ \cdot i$$

Ejercicio 5 Calcula

$$(-1 - i\sqrt{3})^6(\sqrt{3} - i)$$

Solución:

Pasamos a forma polar:

$$-1 - i\sqrt{3} = 2_{240^\circ}$$

$$\sqrt{3} - i = 2_{330^\circ}$$

De forma que:

$$\begin{aligned} (-1 - i\sqrt{3})^6(\sqrt{3} - i) &= (2^6)_{6 \cdot 240^\circ} \cdot 2_{330^\circ} \\ &= (2^6 \cdot 2)_{6 \cdot 240^\circ + 330^\circ} \\ &= 128_{1770^\circ} = 128_{330^\circ} \end{aligned}$$

Ejercicio 6 Calcula

$$\sqrt[3]{\frac{1+i}{2-i}}$$

Solución:

Efectuamos el cociente y pasamos el resultado a forma polar:

$$\frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{1+3i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i = \left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)_{71,57^\circ}$$

La primera raíz cúbica se obtiene haciendo la raíz del módulo y dividiendo por 3 el argumento:

$$z_1 = \left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{10}}{5}}\right)_{71,57^\circ/3} = \left(\frac{\sqrt[6]{10}}{\sqrt[3]{5}}\right)_{23,86^\circ}$$

Como las otras raíces cúbicas tienen el mismo módulo y difieren en el argumento en 120° serán:

$$z_2 = \left(\frac{\sqrt[6]{10}}{\sqrt[3]{5}}\right)_{23,86^\circ+120^\circ} = \left(\frac{\sqrt[6]{10}}{\sqrt[3]{5}}\right)_{143,86^\circ}$$

$$z_3 = \left(\frac{\sqrt[6]{10}}{\sqrt[3]{5}}\right)_{23,86^\circ+240^\circ} = \left(\frac{\sqrt[6]{10}}{\sqrt[3]{5}}\right)_{263,86^\circ}$$

Ejercicio 7 El producto de dos números complejos es -8 y el primero es el cuadrado del segundo. Calcúlalos.

Solución:

Tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= -8 \\ z_1 &= z_2^2 \end{aligned}$$

Sustituyendo $z_1 = z_2^2$ en la primera ecuación resulta $z_2^3 = -8$. El complejo z_2 es, por consiguiente, cualquiera de las raíces cúbicas de -8 . Conocemos una de ellas que es $-2 = 2_{0^\circ}$. Las otras dos tienen el mismo módulo y difieren en 120° en el argumento. Entonces:

$$\begin{aligned} z_2 = 2_{180^\circ} &\implies z_1 = z_2^2 = 4_{360^\circ} = 4_{0^\circ} \\ z_2 = 2_{300^\circ} &\implies z_1 = z_2^2 = 4_{600^\circ} = 4_{240^\circ} \\ z_2 = 2_{60^\circ} &\implies z_1 = z_2^2 = 4_{120^\circ} \end{aligned}$$

Ejercicio 8 Si el producto de dos números complejos es -8 y dividiendo el cubo de uno de ellos entre el otro obtenemos de resultado 2, ¿cuánto valen el módulo y el argumento de cada uno?

Solución:

Los dos complejos son las soluciones del siguiente sistema:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= -8 \\ \frac{z_1^3}{z_2} &= 2 \end{aligned}$$

De la segunda ecuación resulta que $z_2 = \frac{z_1^3}{2}$. Sustituyendo en la primera:

$$z_1 \cdot \frac{z_1^3}{2} = -8 \implies z_1^4 = -16 = 16_{180^\circ}$$

Las soluciones las obtenemos haciendo las raíces cuartas de -16 . Una de ellas es:

$$z_1 = \left(\sqrt[4]{16} \right)_{180^\circ/4} = 2_{45^\circ}$$

Sumando 90° obtenemos las demás. Así pues las soluciones son:

$$z_1 = 2_{45^\circ} \implies z_2 = \frac{z_1^3}{2} = \frac{8_{135^\circ}}{2} = 4_{135^\circ}$$

$$z_1 = 2_{135^\circ} \implies z_2 = \frac{z_1^3}{2} = \frac{8_{405^\circ}}{2} = 4_{45^\circ}$$

$$z_1 = 2_{225^\circ} \implies z_2 = \frac{z_1^3}{2} = \frac{8_{675^\circ}}{2} = 4_{315^\circ}$$

$$z_1 = 2_{315^\circ} \implies z_2 = \frac{z_1^3}{2} = \frac{8_{945^\circ}}{2} = 4_{225^\circ}$$