

Ejercicio 1. *Teorema del resto. Raíces de un polinomio. Teorema del factor.*

Solución:

Teorema 1 (Teorema del resto). *El valor numérico del polinomio $P(x)$ para $x = a$ es igual al resto de dividir este polinomio por $x - a$.*

En efecto, cuando se divide el polinomio $P(x)$ por $x - a$ se obtiene un cociente $C(x)$ y un resto R que cumplen:

$$P(x) = (x - a)C(x) + R$$

y sustituyendo x por a :

$$P(a) = (a - a)C(a) + R = R$$

Definición 1 (Raíz de un polinomio). *El número a es raíz del polinomio $P(x)$ si el valor numérico de este polinomio para $x = a$ es cero.*

Teorema 2 (Teorema del factor). *Si a es una raíz del polinomio $P(x)$, éste es divisible por $x - a$ o, dicho de otra manera, $x - a$ es un factor de $P(x)$.*

Este teorema es una consecuencia directa del teorema del resto. Al ser a raíz de $P(x)$, $P(a) = R = 0$ por lo que:

$$P(x) = (x - a)C(x)$$

Ejercicio 2. *Resolver:*

$$7x^2 - 21x = 0$$

Solución:

$$7x^2 - 21x = 0 \implies 7x(x - 3) = 0 \implies x_1 = 0, x_2 = 3$$

Ejercicio 3. *Resolver la ecuación:*

$$x(2x - 1) + \frac{3}{5} = \frac{3x^2 - x}{5} + \frac{1}{15}$$

Solución:

$$x(2x - 1) + \frac{3}{5} = \frac{3x^2 - x}{5} + \frac{1}{15} \quad (\text{Quitamos denominadores multiplicando por 15})$$

$$15x(2x - 1) + \frac{15 \cdot 3}{5} = \frac{15 \cdot (3x^2 - x)}{5} + \frac{15}{15} \quad (\text{Operando})$$

$$30x^2 - 15x + 9 = 9x^2 - 3x + 1$$

$$21x^2 - 12x + 8 = 0$$

Esta ecuación no tiene solución porque su discriminante $\Delta = 12^2 - 4 \cdot 21 \cdot 8$ es negativo.

Ejercicio 4. Resolver:

$$x(x-1) + 1 = \frac{5}{6} + \frac{x(2x-1)}{3}$$

Solución:

$$x(x-1) + 1 = \frac{5}{6} + \frac{x(2x-1)}{3} \quad (\text{Multiplicamos por 6})$$

$$6x(x-1) + 6 = \frac{6 \cdot 5}{6} + \frac{6x(2x-1)}{3} \quad (\text{Haciendo operaciones})$$

$$6x^2 - 6x + 6 = 5 + 4x^2 - 2x$$

$$2x^2 - 4x + 1 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación de segundo grado son:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 2}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{4} \implies x_1 = \frac{4 + \sqrt{8}}{4} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}, \quad x_2 = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$$

Ejercicio 5. Resolver;

$$3^x + \frac{1}{3^{x+1}} = \frac{28}{9}$$

Solución:

$$3^x + \frac{1}{3^{x+1}} = \frac{28}{9}$$

$$3^x + \frac{1}{3^x \cdot 3} = \frac{28}{9} \quad (\text{Multiplicamos por } 9 \cdot 3^x)$$

$$9 \cdot 3^x 3^x + \frac{9 \cdot 3^x}{3^x \cdot 3} = \frac{9 \cdot 3^x \cdot 28}{9}$$

$$9 \cdot 3^{2x} + 3 = 3^x \cdot 28$$

$$9 \cdot 3^{2x} - 28 \cdot 3^x + 3 = 0$$

Despejamos 3^x con la fórmula de la ecuación de segundo grado:

$$3^x = \frac{28 \pm \sqrt{28^2 - 4 \cdot 9 \cdot 3}}{2 \cdot 9} = \frac{28 \pm 26}{18}$$

Que da dos soluciones:

$$3^x = 3 \implies x = 1$$

$$3^x = \frac{1}{9} \implies x = -2$$

Ejercicio 6.

1. ¿Qué tiene que ocurrir en una ecuación de segundo grado para que sólo tenga una solución?
2. ¿Y para que no haya solución?
3. ¿Y para que tenga dos soluciones?

Solución:

Para que la ecuación de segundo grado tenga una sola solución, su discriminante debe ser igual a cero. Para que no tenga solución el discriminante debe ser negativo y para que tenga dos soluciones debe ser positivo.

Ejercicio 7. Resolver:

$$\ln(x-1) + \ln(x+6) = \ln(3x+2)$$

Solución:

$$\ln(x-1) + \ln(x+6) = \ln(3x+2) \quad (\text{Aplicando la propiedad del logaritmo del producto:})$$

$$\ln[(x-1)(x+6)] = \ln(3x+2)$$

$$(x-1)(x+6) = 3x+2$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

Esta ecuación tiene dos soluciones $x_1 = -4$ y $x_2 = 2$. La primera de ellas no es válida porque cuando se sustituye en la ecuación original aparece el logaritmo de un número negativo.

Ejercicio 8. Resolver:

$$\frac{1}{4}(3x^2-1)(x^2+3) - \frac{1}{3}(2x^2+1)(x^2-3) = 4x^2$$

Solución:

$$\frac{1}{4}(3x^2-1)(x^2+3) - \frac{1}{3}(2x^2+1)(x^2-3) = 4x^2 \quad (\text{Multiplicamos los dos miembros por 12:})$$

$$\frac{12}{4}(3x^2-1)(x^2+3) - \frac{12}{3}(2x^2+1)(x^2-3) = 12 \cdot 4x^2$$

$$3 \cdot (3x^2-1)(x^2+3) - 4 \cdot (2x^2+1)(x^2-3) = 48x^2$$

$$9x^4 + 24x^2 - 9 - 8x^4 + 20x^2 + 12 - 48x^2 = 0$$

$$x^4 - 4x^2 + 3 = 0$$

Despejamos x^2 con la fórmula de la ecuación de segundo grado y obtenemos las siguientes soluciones:

$$x^2 = 3 \implies x_1 = -\sqrt{3}, \quad x_2 = \sqrt{3}$$

$$x^2 = 1 \implies x_3 = -1, \quad x_4 = 1$$

Ejercicio 9. Resolver

$$x - \sqrt{7-3x} = 1$$

Solución:

$$x - \sqrt{7-3x} = 1 \quad (\text{Despejamos la raíz cuadrada:})$$

$$x - 1 = \sqrt{7-3x} \quad (\text{Elevamos al cuadrado los dos miembros:})$$

$$(x-1)^2 = (\sqrt{7-3x})^2$$

$$x^2 - 2x + 1 = 7 - 3x$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

Resolviendo esta ecuación resultan las soluciones $x_1 = -3$ y $x = 2$. La primera de ellas no es válida porque sustituyendo en la ecuación resulta:

$$-3 - \sqrt{7 - 3 \cdot (-3)} = -3 - \sqrt{16} = -3 - 4 = -7 \neq 1$$

La segunda sí es válida:

$$2 - \sqrt{7 - 3 \cdot 2} = 2 - \sqrt{1} = 2 - 1 = 1$$

Ejercicio 10. Resolver la siguiente ecuación factorizando previamente el polinomio:

$$6x^4 - 7x^3 - 36x^2 + 7x + 6 = 0$$

Solución:

Buscamos raíces enteras entre los divisores de 6:

$$\begin{array}{r} 6 \quad -7 \quad -36 \quad 7 \quad 6 \\ -2 \quad -12 \quad 38 \quad -4 \quad -6 \\ \hline 6 \quad -19 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \end{array}$$

Por el teorema del factor, puesto que $x = -2$ es una raíz podemos factorizar el polinomio y escribir la ecuación como:

$$(x + 2)(6x^3 - 19x^2 + 2x + 3) = 0$$

Buscamos ahora una raíz del polinomio de tercer grado entre los divisores del término independiente 3 y encontramos:

$$\begin{array}{r} 6 \quad -19 \quad 2 \quad 3 \\ 3 \quad 18 \quad -3 \quad -3 \\ \hline 6 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \end{array}$$

Así pues, obtenemos la ecuación factorizada

$$(x + 2)(x - 3)(6x^2 - x - 1) = 0$$

Las soluciones se obtienen igualando a cero cada uno de los factores:

$$x + 2 = 0 \implies x_1 = -2$$

$$x - 3 = 0 \implies x_2 = 3$$

$$6x^2 - x - 1 = 0 \implies x_3 = \frac{1}{2}, \quad x_4 = \frac{-1}{3}$$