Ejercicio 1. *Teorema del resto. Raíces de un polinomio. Teorema del factor.*

Solución:

Teorema 1 (Teorema del resto)**.** *El valor numérico del polinomio $P(x)$ para $x = a$ es igual al resto de dividir este polinomio por $x - a$.*

En efecto, cuando se divide el polinomio $P(x)$ por $x - a$ se obtiene un cociente $C(x)$ y un resto R que cumplen:

$$P(x) = (x - a)C(x) + R$$

y sustituyendo x por a:

$$P(a) = (a - a)C(a) + R = R$$

Definición 1 (Raíz de un polinomio)**.** *El número a es raíz del polinomio $P(x)$ si el valor numérico de este polinomio para $x = a$ es cero.*

Teorema 2 (Teorema del factor)**.** *Si a es una raíz del polinomio $P(x)$, éste es divisible por $x-a$ o, dicho de otra manera, $x - a$ es un factor de $P(x)$.*

Este teorema es una consecuencia directa del teorema del resto. Al ser a raíz de $P(x)$, $P(a) = R = 0$ por lo que:

$$P(x) = (x - a)C(x)$$

Ejercicio 2. *Resolver:*

$$7x^2 - 21x = 0$$

Solución:

$$7x^2 - 21x = 0 \quad\Longrightarrow\quad 7x(x - 3) = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_1 = 0,\ x_2 = 3$$

Ejercicio 3. *Resolver la ecuación:*

$$x(2x - 1) + \frac{3}{5} = \frac{3x^2 - x}{5} + \frac{1}{15}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
&x(2x - 1) + \frac{3}{5} = \frac{3x^2 - x}{5} + \frac{1}{15} && \text{(Quitamos denominadores multiplicando por 15)}\\
&15x(2x - 1) + \frac{15 \cdot 3}{5} = \frac{15 \cdot (3x^2 - x)}{5} + \frac{15}{15} && \text{(Operando)}\\
&30x^2 - 15x + 9 = 9x^2 - 3x + 1\\
&21x^2 - 12x + 8 = 0
\end{aligned}$$

Esta ecuación no tiene solución porque su discriminante $\Delta = 12^2 - 4 \cdot 21 \cdot 8$ es negativo.

Ejercicio 4. *Resolver:*

$$x(x-1)+1=\frac{5}{6}+\frac{x(2x-1)}{3}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
&x(x-1)+1=\frac{5}{6}+\frac{x(2x-1)}{3} && \text{(Multiplicamos por 6)}\\
&6x(x-1)+6=\frac{6\cdot 5}{6}+\frac{6x(2x-1)}{3} && \text{(Haciendo operaciones)}\\
&6x^2-6x+6=5+4x^2-2x\\
&2x^2-4x+1=0
\end{aligned}$$

Las soluciones de esta ecuación de segundo grado son:

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot 2}}{4}=\frac{4\pm\sqrt{8}}{4}\quad\Longrightarrow\quad x_1=\frac{4+\sqrt{8}}{4}=\frac{2+\sqrt{2}}{2},\quad x_2=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

Ejercicio 5. *Resolver;*

$$3^x+\frac{1}{3^{x+1}}=\frac{28}{9}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
&3^x+\frac{1}{3^{x+1}}=\frac{28}{9}\\
&3^x+\frac{1}{3^x\cdot 3}=\frac{28}{9} && \text{(Multiplicamos por } 9\cdot 3^x)\\
&9\cdot 3^x3^x+\frac{9\cdot 3^x}{3^x\cdot 3}=\frac{9\cdot 3^x\cdot 28}{9}\\
&9\cdot 3^{2x}+3=3^x\cdot 28\\
&9\cdot 3^{2x}-28\cdot 3^x+3=0
\end{aligned}$$

Despejamos 3^x con la fórmula de la ecuación de segundo grado:

$$3^x=\frac{28\pm\sqrt{28^2-4\cdot 9\cdot 3}}{2\cdot 9}=\frac{28\pm 26}{18}$$

Que da dos soluciones:

$$\begin{aligned}
&3^x=3 \quad\Longrightarrow\quad x=1\\
&3^x=\frac{1}{9} \quad\Longrightarrow\quad x=-2
\end{aligned}$$

Ejercicio 6.

1. *¿Qué tiene que ocurrir en una ecuación de segundo grado para que sólo tenga una solución?*
2. *¿Y para que no haya solución?*
3. *¿Y para que tenga dos soluciones?*

Solución:

Para que la ecuación de segundo grado tenga una sola solución, su discriminante debe ser igual a cero. Para que no tenga solución el disciminante sebe ser negativo y para que tenga dos soluciones debe ser positivo.

Ejercicio 7. *Resolver:*

$$\ln(x-1)+\ln(x+6)=\ln(3x+2)$$

Solución:

$$\ln(x-1)+\ln(x+6)=\ln(3x+2) \qquad \text{(Aplicando la propiedad del logaritmo del producto:}$$
$$\ln\left[(x-1)(x+6)\right]=\ln(3x+2)$$
$$(x-1)(x+6)=3x+2$$
$$x^2+2x-8=0$$

Esta ecuación tiene dos soluciones $x_1=-4$ y $x_2=2$. La primera de ellas no es válida porque cuando se sustituye en la ecuación original aparece el logaritmo de un número negativo.

Ejercicio 8. *Resolver:*

$$\frac{1}{4}\,(3x^2-1)(x^2+3)-\frac{1}{3}\,(2x^2+1)(x^2-3)=4x^2$$

Solución:

$$\frac{1}{4}\,(3x^2-1)(x^2+3)-\frac{1}{3}\,(2x^2+1)(x^2-3)=4x^2 \qquad \text{(Multiplicamos los dos miembros por 12:)}$$
$$\frac{12}{4}\,(3x^2-1)(x^2+3)-\frac{12}{3}\,(2x^2+1)(x^2-3)=12\cdot 4x^2$$
$$3\cdot(3x^2-1)(x^2+3)-4\cdot(2x^2+1)(x^2-3)=48x^2$$
$$9x^4+24x^2-9-8x^4+20x^2+12-48x^2=0$$
$$x^4-4x^2+3=0$$

Despejamos x^2 con la fórmula de la ecuación de segundo grado y obtenemos las siguientes soluciones:

$$x^2=3 \quad\Longrightarrow\quad x_1=-\sqrt{3},\quad x_2=\sqrt{3}$$
$$x^2=1 \quad\Longrightarrow\quad x_3=-1,\quad x_4=1$$

Ejercicio 9. *Resolver*

$$x-\sqrt{7-3x}=1$$

Solución:

$$x-\sqrt{7-3x}=1 \qquad \text{(Despejamos la raíz cuadrada:)}$$
$$x-1=\sqrt{7-3x} \qquad \text{(Elevamos al cuadrado los dos miembros:)}$$
$$(x-1)^2=\left(\sqrt{7-3x}\right)^2$$
$$x^2-2x+1=7-3x$$
$$x^2+x-6=0$$

Resolviendo esta ecuación resultan las soluciones $x_1 = -3$ y $x = 2$. La primera de ellas no es válida porque sustituyendo en la ecuación resulta:

$$-3 - \sqrt{7 - 3 \cdot (-3)} = -3 - \sqrt{16} = -3 - 4 = -7 \neq 1$$

La segunda sí es válida:

$$2 - \sqrt{7 - 3 \cdot 2} = 2 - \sqrt{1} = 2 - 1 = 1$$

Ejercicio 10. *Resolver la siguiente ecuación factorizando previamente el polinomio:*

$$6x^4 - 7x^3 - 36x^2 + 7x + 6 = 0$$

Solución:

Buscamos raíces enteras entre los divisores de 6:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 6 & -7 & -36 & 7 & 6 \\ -2 & & -12 & 38 & -4 & -6 \\ \hline & 6 & -19 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

Por el teorema del factor, puesto que $x = -2$ es una raíz podemos factorizar el polinomio y escribir la ecuación como:

$$(x+2)(6x^3 - 19x^2 2x + 3) = 0$$

Buscamos ahora una raíz del polinomio de tercer grado entre los divisores del término independiente 3 y encontramos:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & -19 & 2 & 3 \\ 3 & & 18 & -3 & -3 \\ \hline & 6 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

Así pues, obtenemos la ecuación factorizada

$$(x+2)(x-3)(6x^2 - x - 1) = 0$$

Las soluciones se obtienen igualando a cero cada uno de los factores:

$$\begin{aligned} & x + 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -2 \\ & x - 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = 3 \\ & 6x^2 - x - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_3 = \frac{1}{2}, \quad x_4 = \frac{-1}{3} \end{aligned}$$
