1. El plano $\pi: 2x+2y+z-4=0$ forma con los planos de coordenadas *XY*, *XZ*, *YZ* un tetraedro de vértices *O*, *A*, *B*, *C*. Determina:

a) Las coordenadas de *A*, *B* y *C*.

b) El área de la cara *ABC* del tetraedro.

c) El ángulo que forman las caras *ABC* y *OAB*.

d) La distancia del vértice *O* al plano π.

e) La ecuación paramétrica de la recta donde π corta al plano *XZ*.

2. Se considera el plano $\pi: x-y-z+1=0$, la recta $r: \frac{x}{5}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{-1}$ y el punto *P*(4, −6, 5).

Determina las distancias del punto al plano y a la recta.

3. Se consideran las rectas de ecuaciones $r: \begin{cases} x-y+z-4=0 \\ 2x+y-z+1=0 \end{cases}$ y $s: \frac{x+2}{0}=y-5=z+1$.

a) Confirma que son rectas paralelas.

b) Halla la ecuación del plano que las contiene.

c) Halla la distancia entre las dos rectas.

4. El volumen del tetraedro de vértices *A*(−2, 5, 1), *B*(1, 1, −1), *C*(0, 4, 0) y *D*(*k*, −3, 2) es 10 u^3.

a) Determina el valor de *k*.

b) Para el valor de *k* hallado, ¿cuánto mide la altura del tetraedro desde *D*?

c) Comprueba, utilizando la altura hallada, que el volumen de un tetraedro es $V=\frac{1}{3}A_{\text{Base}}\cdot h$.

5. Dados los puntos *P*(−5, 1, −1), *Q*(−9, 7, −4) y el plano $\pi: 3x-y+z-5=0$, determina las coordenadas de un punto *T* del plano π para que la suma de las distancias *PT* + *TQ* sea la menor posible.

Calcula cuánto es la suma de las dos distancias.

Toma otro punto cualquiera *X* del plano y comprueba que la suma de distancias *PX* + *XQ* es mayor que la hallada anteriormente.

6. Determina la ecuación de tres planos que contienen a la recta $r: \begin{cases} x-2y+z=5 \\ x-z=-2 \end{cases}$ y que dividen al segmento *MN*, de extremos *M*(−1, 5, 2), *N*(7, 1, −10), en cuatro partes iguales.

¿Qué ángulos forman los tres planos entre sí?

1. a) El plano π interseca a los ejes en los puntos $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ y $C(0, 0, 4)$.

b) Como $\overrightarrow{AB} = (-2, 2, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-2, 0, 4)$ y $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (8, 8, 4)$, el área del triángulo ABC es:

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{8^2 + 8^2 + 4^2} = 6 \text{ u}^2$$

c) Los vectores normales a las caras ABC y AOB son $\vec{w} = (2, 2, 1)$ y $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

$$\alpha = \arccos\frac{|\vec{w} \cdot \vec{k}|}{|\vec{w}||\vec{k}|} = \arccos\frac{1}{3} \approx 70° 31' 44''$$

d) $d(O, \pi) = \dfrac{|0 + 0 + 0 - 4|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \dfrac{4}{3}$ u

e) $\begin{cases} y = 0 \\ 2x + 2y + z - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 4 - 2\lambda \end{cases}$

2. $d(P, \pi) = \dfrac{|4 + 6 - 5 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ u

$$d(P, r) = \frac{\left|\vec{u} \times \overrightarrow{AP}\right|}{|\vec{u}|} = \frac{|(-9, 39, 33)|}{|(5, 2, -1)|} = \sqrt{\frac{897}{10}} \text{ u}$$

3. a) $r(A, \vec{u}): \begin{cases} A(1, 0, 3) \\ \vec{u} = (0, 1, 1) \end{cases}$ y $s(B, \vec{v}): \begin{cases} B(-2, 5, -1) \\ \vec{v} = (0, 1, 1) \end{cases}$

Tienen la misma dirección: son paralelas.

b) $\begin{vmatrix} 0 & -3 & x-1 \\ 1 & 5 & y \\ 1 & -4 & z-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + y - z = 0$

c) $d(r, s) = d(A, s) = \dfrac{\left|\vec{v} \times \overrightarrow{AB}\right|}{|\vec{v}|} = 3\dfrac{\sqrt{22}}{2}$

4. a) $V = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}\right]\right| = 10 \text{ u}^3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ k & -7 & 2 \end{vmatrix} = 60 \Rightarrow 2k + 17 = 60 \Rightarrow k = \frac{43}{2}$$

b) $\pi\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right): 2x - y + 5z + 4 = 0$

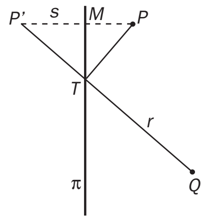
$$h = d(D, \pi) = \frac{|43 + 3 + 10 + 4|}{\sqrt{4 + 1 + 25}} = \frac{60}{\sqrt{30}} = 2\sqrt{30} \text{ u}$$

c) $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \dfrac{1}{2}\sqrt{4 + 1 + 25} = \dfrac{1}{2}\sqrt{30} \text{ u}^2$

$$V = \frac{1}{3}\frac{1}{2}\sqrt{30}\,2\sqrt{30} = 10 \text{ u}^3$$

5. Los puntos dados están al mismo lado del plano π, por ello no es útil trazar la recta que pasa por P y Q. En este caso se traza la recta que pasa por Q y por el simétrico de P respecto del plano.

$s(P, \vec{w}): \begin{cases} x = -5 + 3\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$



$M = s \cap \pi \Rightarrow 11\lambda - 22 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow M(1, -1, 1)$

Como M es el punto medio de PP', se obtiene $P'(7, -3, 3)$.

$r(Q, \overrightarrow{QP'}): \begin{cases} x = -9 + 16\lambda \\ y = 7 - 10\lambda \\ z = -4 + 7\lambda \end{cases}$, $T = r \cap \pi$

Resolviendo el sistema, $T\left(\dfrac{103}{65}, \dfrac{25}{65}, \dfrac{41}{65}\right)$

$$PT + TQ = \left|\overrightarrow{PT}\right| + \left|\overrightarrow{TQ}\right| = \frac{\sqrt{5}}{65}(198 + 387) = 9\sqrt{5}$$

Si se toma otro $X \in \pi$, por ejemplo $X(0, -2, 3)$, se obtiene:
$PX + XQ = \sqrt{50} + \sqrt{211} \approx 21{,}6 > 20{,}12 \approx 9\sqrt{5}$

6. Los planos pertenecen al haz de planos de arista la recta r, cuya ecuación es:
$(1 + \lambda)x - 2y + (1 - \lambda)z + (2\lambda - 5) = 0$

Los puntos que dividen el segmento MN en cuatro partes iguales son: $P_1(1, 4, -1)$, $P_2(3, 3, -4)$ y $P_3(5, 2, -7)$. Los planos del haz que pasan por esos puntos se obtienen con:

$$\lambda_1 = \frac{13}{4},\ \lambda_2 = \frac{4}{3},\ \lambda_3 = \frac{11}{14}$$

y son: $\begin{cases} 17x - 8y - 9z + 6 = 0 \\ 7x - 6y - z - 7 = 0 \\ 25x - 28y + 3z - 48 = 0 \end{cases}$

Los ángulos que forman son:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2|}{|\vec{w}_1||\vec{w}_2|} = \frac{176}{\sqrt{434}\sqrt{86}} \Rightarrow \alpha = 24° 21' 22''$$

$$\cos\beta = \frac{|\vec{w}_2 \cdot \vec{w}_3|}{|\vec{w}_2||\vec{w}_3|} = \frac{340}{\sqrt{86}\sqrt{1418}} \Rightarrow \beta = 13° 11' 19''$$

$$\cos\gamma = \frac{|\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_3|}{|\vec{w}_1||\vec{w}_3|} = \frac{622}{\sqrt{434}\sqrt{1418}} \Rightarrow \gamma = 37° 32' 40''$$