12 FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

En esta unidad profundizaremos en el conocimiento de funciones polinómicas de primer y segundo grado. Abordaremos el aprendizaje de qué es una función constante, una función de proporcionalidad directa y una función lineal. Se introduce por primera vez la función cuadrática, es importante describir situaciones de la vida cotidiana que puedan ser modelizadas mediante funciones de este tipo. Es necesario explicarles que las expresiones algebraicas que representan funciones también reciben el nombre de *ecuaciones.*

Al terminar la unidad es muy importante que nos aseguremos de que los alumnos sean capaces de construir una gráfica a partir de una tabla de valores y a partir de un enunciado contextualizado describiendo el fenómeno expuesto. Lo fundamental es que los alumnos relacionen con facilidad los lenguajes gráfico y algebraico para que los apliquen en el estudio de funciones polinómicas que representen rectas y parábolas.

Será muy importante que reconozcan la relación entre magnitudes directamente proporcionales y las funciones de proporcionalidad directa.

La relación que existe entre las ecuaciones de segundo grado y la representación de funciones cuadráticas será básica para que aprendan a encontrar los elementos característicos de este tipo de funciones.

Los contenidos de esta unidad se presentan partiendo de una situación cotidiana o de un ejercicio, es conveniente que el alumno lea la introducción de cada sección y sea capaz de argumentar y compartir con sus compañeros los retos de aprendizaje que se les presentan.

La metodología se ha diseñado incluyendo actividades integradas que permitirán adquirir varias competencias al mismo tiempo.

Comunicación lingüística (CL)

Es la protagonista de toda la unidad teniendo especial importancia en el epígrafe Aplicaciones de funciones lineales y cuadráticas, y en las secciones Matemáticas vivas y Funciones en los medios de comunicación, así como en Lee y comprende las matemáticas al final del bloque.

Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT)

Se desarrolla lo largo de toda la unidad y especialmente en el epígrafe Aplicaciones y en la sección Matemáticas vivas.

Competencia digital (CD)

Se integra a lo largo de la unidad haciendo partícipes a los alumnos de las ventajas que tiene recurrir a los medios informáticos.

Competencias sociales y cívicas (CSC)

Está presente en varias actividades que permitirán desarrollar la capacidad de comunicarse de una manera constructiva.

Competencia aprender a aprender (CAA)

En toda la unidad se considera la necesidad de potenciar en los alumnos la habilidad para iniciar y organizar su aprendizaje. Como esta competencia se adquiere también con el trabajo en equipo, la puesta en común será clave para que vean lo que hacen los demás.

Competencia sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (CSIEE)

Se desarrolla especialmente en las últimas actividades de cada epígrafe (Investiga o Desafío) y en la sección de Matemáticas vivas.

Competencia conciencia y expresiones culturales (CCEC)

Se integra en las secciones Matemáticas vivas y Funciones en los medios de comunicación.

El tiempo previsto para el desarrollo de la unidad es de tres semanas, aunque deberá adaptarse a las necesidades de los alumnos.

Objetivos

Los objetivos que los alumnos tienen que alcanzar son:

- Reconocer situaciones en las que aparezcan funciones lineales en sus diferentes formas y contextos.
- Identificar la pendiente y la ordenada en el origen de una recta y reconocer las diferentes formas de expresión que tiene una recta.
- Conocer las características de las funciones cuadráticas y e identificar situaciones de la vida real donde aparecen.
- Realizar una tarea de trabajo cooperativo utilizando funciones cuadráticas.

Atención a la diversidad

Con el fin de atender los distintos ritmos de aprendizaje de los alumnos, se proponen, algunas **actividades de refuerzo y de ampliación** que podrán utilizarse como alternativa o complemento a las que figuran en el libro del alumno.

Material complementario

En el material complementario **Comprende y resuelve problemas** se proponen actividades para trabajar la comprensión y la resolución de problemas relacionadas con el estudio de funciones elementales. Por otra parte, el material complementario **Practica**+ cuenta con un repaso de los contenidos y procedimientos estudiados sobre funciones y se proponen nuevas actividades para repasar y afianzar dichos contenidos.

Además, para ayudar a los alumnos a comprender y practicar conceptos relacionados con las funciones lineales y cuadráticas pueden acceder a las lecciones 1168, 1312 y 1314 de la web www.mismates.es.

PROGRAMACIÓN DE LA UNIDAD

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables	Relación de actividades del libro del alumno	Competencias clave
Funciones constantes	1. Reconocer funciones constantes derivadas de tablas, gráficas o enunciados.	1.1. Identifica funciones constantes. 1.2. Obtiene la ecuación de una función constante. 1.3. Representa una función constante.	1 2, 4 3	CL CMCT CSC CAA CSIEE
Función de proporcionalidad directa Pendiente de una recta	2. Identificar funciones de proporcionalidad directa. 3. Determinar la pendiente de una función de proporcionalidad directa tanto gráfica como analíticamente.	2.1. Reconoce funciones de proporcionalidad directa. 2.2 Construye la gráfica de una función de proporcionalidad directa a partir de una tabla, enunciado o ecuación. 3.1. Halla la pendiente de una función de proporcionalidad directa y determina rectas paralelas. 3.2 Obtiene la expresión analítica de una función de proporcionalidad directa.	5, 7 6, 12 10, 49 8, 9, 11	CL CMCT CSC CD CAA CSIEE
Funciones lineales	4. Reconocer funciones lineales. 5. Comprender el significado de pendiente y ordenada en el origen en funciones lineales.	4.1. Distingue y representa funciones lineales a partir de un enunciado, una tabla o una expresión algebraica. 5.1. Reconoce la pendiente y la ordenada en el origen, halla la expresión algebraica de funciones lineales y determina e identifica rectas paralelas.	15, 46, 48 13, 14, 16-21 47, 50-56	CL CMCT CSC CAA CSIEE
Ecuaciones de la recta	6. Determinar las diferentes formas de expresar una función lineal.	6.1. Expresa una recta mediante diferentes expresiones analíticas. 6.2. Identifica puntos por los que pasa una recta, puntos de corte, pendiente y representa gráficamente. 6.3. Reconoce la relación entre pendiente y paralelismo.	22-25 57-59 26-31 50	CL CMCT CSC CAA CSIEE
Funciones cuadráticas Características de las parábolas	7. Reconocer situaciones de relación funcional que necesiten ser descritas mediante funciones cuadráticas, calculando sus parámetros y características.	7.1. Calcula e interpreta adecuadamente las características de las parábolas. 7.2. Representa funciones cuadráticas.	33, 60-62 65-67, 69 34-36, 63, 64, 68 70-72	CL CMCT CSC CAA CSIEE
Aplicaciones Aplicaciones de las funciones lineales Aplicaciones de las funciones cuadráticas	8. Describir y modelizar relaciones de la vida cotidiana mediante una función lineal. 9. Identificar y describir y representar funciones cuadráticas presentes en el entorno cotidiano.	8.1. Asocia a funciones lineales enunciados de problemas contextualizados. 9.1. Interpreta el comportamiento de una función cuadrática. 9.2. Modeliza un problema contextualizado mediante una función cuadrática.	32, 37-43, 45 73-78 44, 79 F1, F2 Matemáticas vivas 1-3 Trabajo cooperativo	CL CMCT CD CSC CAA CSIEE CCEC

MAPA DE CONTENIDOS DE LA UNIDAD

PARA EL PROFESOR

Actividades de Refuerzo
Actividades de Ampliación

Propuesta de Evaluación A
Propuesta de Evaluación B

MATERIAL COMPLEMENTARIO

Comprende y resuelve problemas

Practica+

MisMates.es
Lecciones 1168, 1312 y 1314 de la web mismates.es

Presentación de la unidad
Ideas previas
Repasa lo que sabes

1. Funciones constantes

2. Función de proporcionalidad directa
- Pendiente de una recta

3. Funciones lineales

4. Ecuaciones de la recta

5. Funciones cuadráticas
- Características de las parábolas

6. Aplicaciones
- Aplicaciones de las funciones lineales
- Aplicaciones de las funciones cuadráticas

¿Qué tienes que saber?
- Funciones lineales
- Ecuaciones de la recta
- Funciones cuadráticas

Actividades finales

Matemáticas vivas
Arquitectura
- Estudio de funciones cuadráticas en formas de nuestro entorno.

Avanza
Función de proporcionalidad inversa

Funciones en los medios de comunicación

PARA EL ALUMNO

Matemáticas en el día a día
Contenido WEB. Trayectorias parabólicas

GeoGebra. Función de proporcionalidad directa 1
GeoGebra. Función de proporcionalidad directa 2

GeoGebra. Gráfica de una función cuadrática

Actividades interactivas

Trabajo cooperativo
Tarea cuya estrategia es *Por este medio resuelvo…*, de Mel Silberman

12

FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

La curiosidad por investigar relaciones entre magnitudes llevó a crear el concepto de función. Por ejemplo, los cables que sostienen una antena de radiofrecuencia se pueden describir mediante una función lineal. La gráfica de este tipo de funciones es una recta.

Por otro lado, la curva que describe la antena parabólica es una parábola, de ahí su nombre. Las funciones cuyas gráficas son parábolas son las funciones cuadráticas.

IDEAS PREVIAS
- Magnitudes directamente proporcionales.
- Ecuaciones de primer y segundo grado.
- Sistemas de ecuaciones lineales.

REPASA LO QUE SABES

1. Entre los siguientes pares de magnitudes indica cuáles son directamente proporcionales.
   a) La superficie que se quiere pintar y los kilos de pintura necesarios.
   b) El número de alumnos que preparan una fiesta y las horas que se necesitan para la preparación.
2. Resuelve estas ecuaciones de primer grado.
   a) $2x+5=0$ b) $\frac{x}{2}+5=0$ c) $\frac{2x}{3}+5=3x-\frac{1}{6}$
3. Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones de segundo grado.
   a) $x^2+4x=0$ b) $2x^2-4=0$ c) $x^2+4x+3=0$
4. Resuelve estos sistemas de ecuaciones lineales por el método que consideres más adecuado.
   a) $\left.\begin{array}{r}2x+y=3\\5x-y=4\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r}2x-2y=4\\5x+y=16\end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r}4x-10y=0\\2x+5y=2\end{array}\right\}$

MATEMÁTICAS EN EL DÍA A DÍA

A principios del siglo XVII, Galileo Galilei (1564-1642) descubrió la trayectoria parabólica que describen los objetos que se desplazan mediante un movimiento acelerado de forma horizontal u oblicua bajo la acción de la gravedad.

mac3e43

233

Sugerencias didácticas

La presentación de la unidad podría hacerse recordando, mediante ejemplos cotidianos, cuándo dos magnitudes son proporcionales, y, a continuación, hacer un repaso de la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado así como de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, haciendo resaltar la importancia de manejar correctamente el cálculo algebraico.

Contenido WEB. TRAYECTORIAS PARABÓLICAS

En la sección Matemáticas en el día a día se introduce un recurso TIC para complementar la página de inicio con información relativa a la unidad. En este caso se presenta una breve biografía de Galileo Galilei, aportando algunos datos sobre su vida y su obra. Puede utilizarse para motivar a los alumnos antes de comenzar a trabajar la unidad o como ampliación para aquellos alumnos que muestren un interés especial.

Repasa lo que sabes

Soluciones de las actividades

1. Entre los siguientes pares de magnitudes indica cuáles son directamente proporcionales.

a) La superficie que se quiere pintar y los kilos de pintura necesarios.

b) El número de alumnos que preparan una fiesta y las horas que se necesitan para la preparación.

a) Son magnitudes directamente proporcionales. **b)** No lo son, son inversamente proporcionales.

2. Resuelve estas ecuaciones de primer grado.

a) $2x+5=0$ **b)** $\frac{x}{2}+5=0$ **c)** $\frac{2x}{3}+5=3x-\frac{1}{6}$

a) $2x=-5 \rightarrow x=-\frac{5}{2}$ **b)** $\frac{x}{2}=-5 \rightarrow x=-10$ **c)** $\frac{4x+30}{6}=\frac{18x-1}{6} \rightarrow 14x=31 \rightarrow x=\frac{31}{14}$

3. Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a) $x^2+4x=0$ **b)** $2x^2-4=0$ **c)** $x^2+4x+3=0$

a) $x(x+4)=0 \rightarrow \begin{cases}x=0\\x=-4\end{cases}$ **b)** $x^2=\frac{4}{2}=2 \rightarrow \begin{cases}x=\sqrt{2}\\x=-\sqrt{2}\end{cases}$ **c)** $x=\frac{-4\pm\sqrt{4}}{2} \rightarrow \begin{cases}x_1=-1\\x_2=-3\end{cases}$

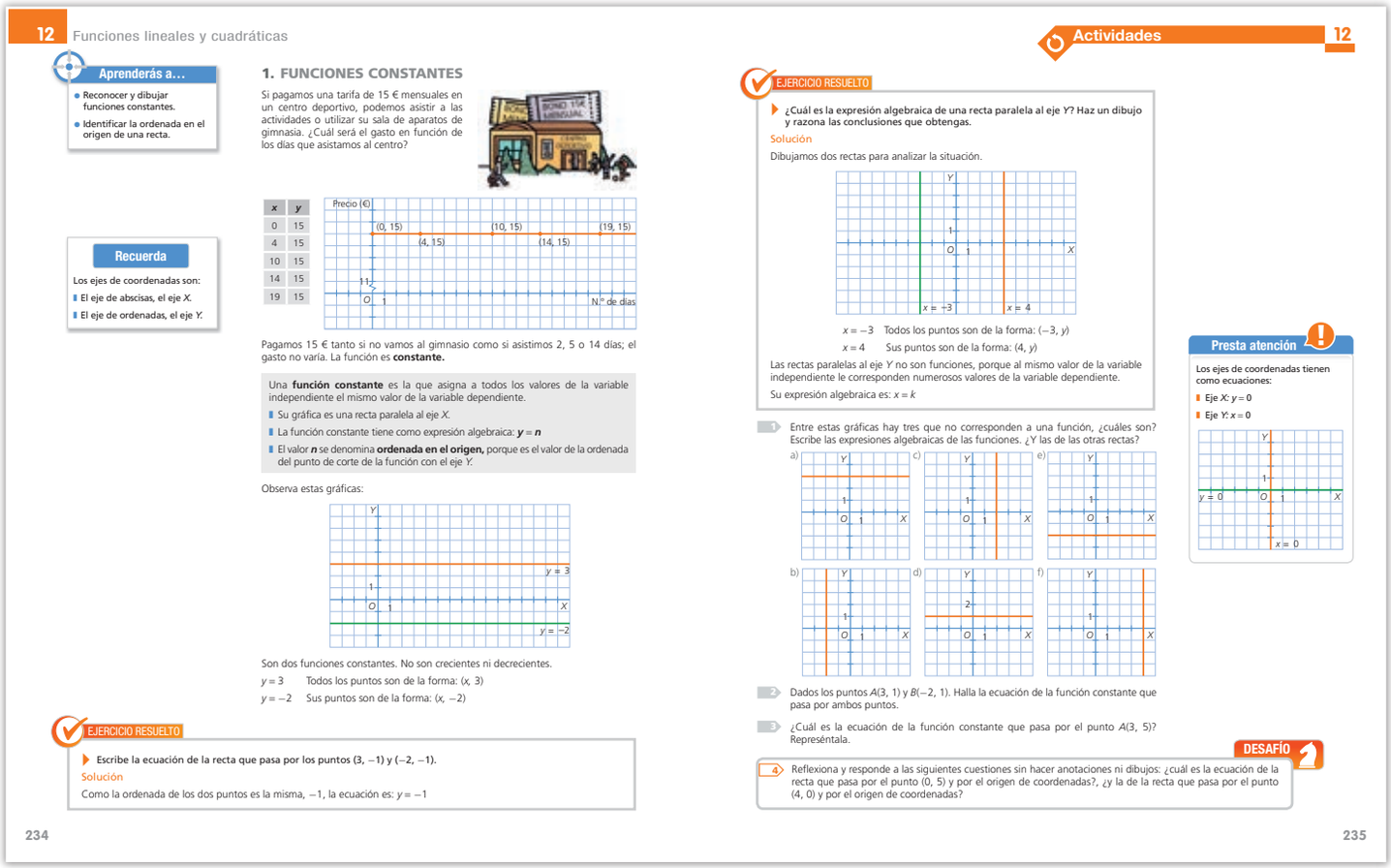
4. Resuelve este sistema de ecuaciones lineales por el método que consideres más adecuado.

a) $\left.\begin{array}{r}2x+y=3\\5x-y=4\end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r}2x-2y=4\\5x+y=16\end{array}\right\}$ **c)** $\left.\begin{array}{r}4x-10y=0\\2x+5y=2\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r}2x+y=3\\5x-y=4\end{array}\right\} \xrightarrow{1^a+2^a} 7x=7 \rightarrow x=1$ **b)** $x=3,\ y=1$ **c)** $x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{5}$

$2\cdot 1+y=3 \rightarrow y=1$

1. Funciones constantes



12 Funciones lineales y cuadráticas

Aprenderás a…

- Reconocer y dibujar funciones constantes.
- Identificar la ordenada en el origen de una recta.

Recuerda

Los ejes de coordenadas son:

- El eje de abscisas, el eje *X*.
- El eje de ordenadas, el eje *Y*.

1. FUNCIONES CONSTANTES

Si pagamos una tarifa de 15 € mensuales en un centro deportivo, podemos asistir a las actividades o utilizar su sala de aparatos de gimnasia. ¿Cuál será el gasto en función de los días que asistamos al centro?

x	y
0	15
4	15
10	15
14	15
19	15

Precio (€) (0, 15) (4, 15) (10, 15) (14, 15) (19, 15) N.º de días

Pagamos 15 € tanto si no vamos al gimnasio como si asistimos 2, 5 o 14 días; el gasto no varía. La función es **constante.**

Una **función constante** es la que asigna a todos los valores de la variable independiente el mismo valor de la variable dependiente.

- Su gráfica es una recta paralela al eje *X*.
- La función constante tiene como expresión algebraica: $y = n$
- El valor n se denomina **ordenada en el origen,** porque es el valor de la ordenada del punto de corte de la función con el eje *Y*.

Observa estas gráficas:

$y = 3$ $y = -2$

Son dos funciones constantes. No son crecientes ni decrecientes.

$y = 3$ Todos los puntos son de la forma: $(x, 3)$

$y = -2$ Sus puntos son de la forma: $(x, -2)$

EJERCICIO RESUELTO

Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos (3, −1) y (−2, −1).

Solución

Como la ordenada de los dos puntos es la misma, −1, la ecuación es: $y = -1$

234

Actividades 12

EJERCICIO RESUELTO

¿Cuál es la expresión algebraica de una recta paralela al eje *Y*? Haz un dibujo y razona las conclusiones que obtengas.

Solución

Dibujamos dos rectas para analizar la situación.

$x = -3$ $x = 4$

$x = -3$ Todos los puntos son de la forma: $(-3, y)$

$x = 4$ Sus puntos son de la forma: $(4, y)$

Las rectas paralelas al eje *Y* no son funciones, porque al mismo valor de la variable independiente le corresponden numerosos valores de la variable dependiente.

Su expresión algebraica es: $x = k$

Presta atención

Los ejes de coordenadas tienen como ecuaciones:

- Eje *X*: $y = 0$
- Eje *Y*: $x = 0$

$y = 0$ $x = 0$

1 Entre estas gráficas hay tres que no corresponden a una función, ¿cuáles son? Escribe las expresiones algebraicas de las funciones. ¿Y las de las otras rectas?

a) b) c) d) e) f)

2 Dados los puntos $A(3, 1)$ y $B(-2, 1)$. Halla la ecuación de la función constante que pasa por ambos puntos.

3 ¿Cuál es la ecuación de la función constante que pasa por el punto $A(3, 5)$? Represéntala.

DESAFÍO

4 Reflexiona y responde a las siguientes cuestiones sin hacer anotaciones ni dibujos: ¿cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto (0, 5) y por el origen de coordenadas?, ¿y la de la recta que pasa por el punto (4, 0) y por el origen de coordenadas?

235

Sugerencias didácticas

Debemos plantear varios ejemplos gráficos de funciones constantes basados en situaciones cercanas a los alumnos.

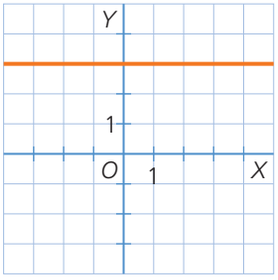
Es recomendable que insistamos en el concepto de coordenadas de un punto (abscisa, ordenada) en el plano dejando muy claro que *ordenada en el origen* es el valor de la ordenada cuando la abscisa es cero.

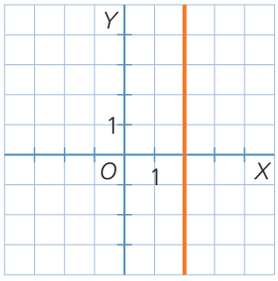
Es fundamental presentar a los alumnos las rectas cuya expresión algebraica es $x = k$, por asociación con la solución que obtienen al resolver ecuaciones de primer grado, puede que interpreten que se trata no de una recta sino de un solo valor. Debemos indicar que $x = k$ indica que los puntos (abscisa, ordenada) de la recta deben cumplir que la abscisa debe ser k y que no hay ninguna condición para la ordenada, por lo que podrá tomar infinitos valores.

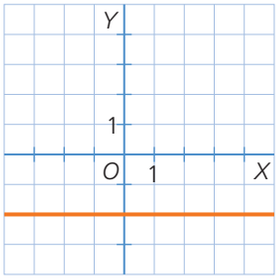
Hemos de resaltar que este tipo de rectas no son funciones.

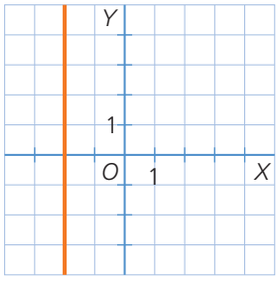
Soluciones de las actividades

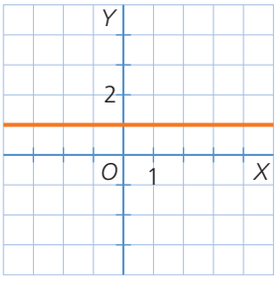
1 Entre estas gráficas hay tres que no corresponden a una función, ¿cuáles son? Escribe las expresiones algebraicas de las funciones. ¿Y las de las otras rectas?

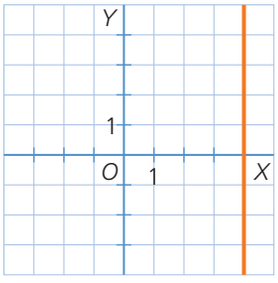
a)


c)


e)


b)


d)


f)


No son funciones las gráficas de los apartados **b)**, **c)** y **f)**.

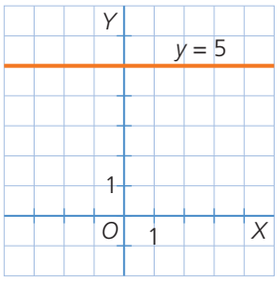
a) $y = 3$ **b)** $x = -2$ **c)** $x = 2$ **d)** $y = 1$ **e)** $y = -2$ **f)** $x = 4$

2 Dados los puntos $A(3, 1)$ y $B(-2, 1)$. Halla la ecuación de la función constante que pasa por ambos puntos.

Como la ordenada de los dos puntos es la misma, 1, la ecuación es: $y = 1$

3 ¿Cuál es la ecuación de la función constante que pasa por el punto $A(3, 5)$? Represéntala.

Como la ordenada del punto es 5, la ecuación de la función constante que pasa por A es: $y = 5$

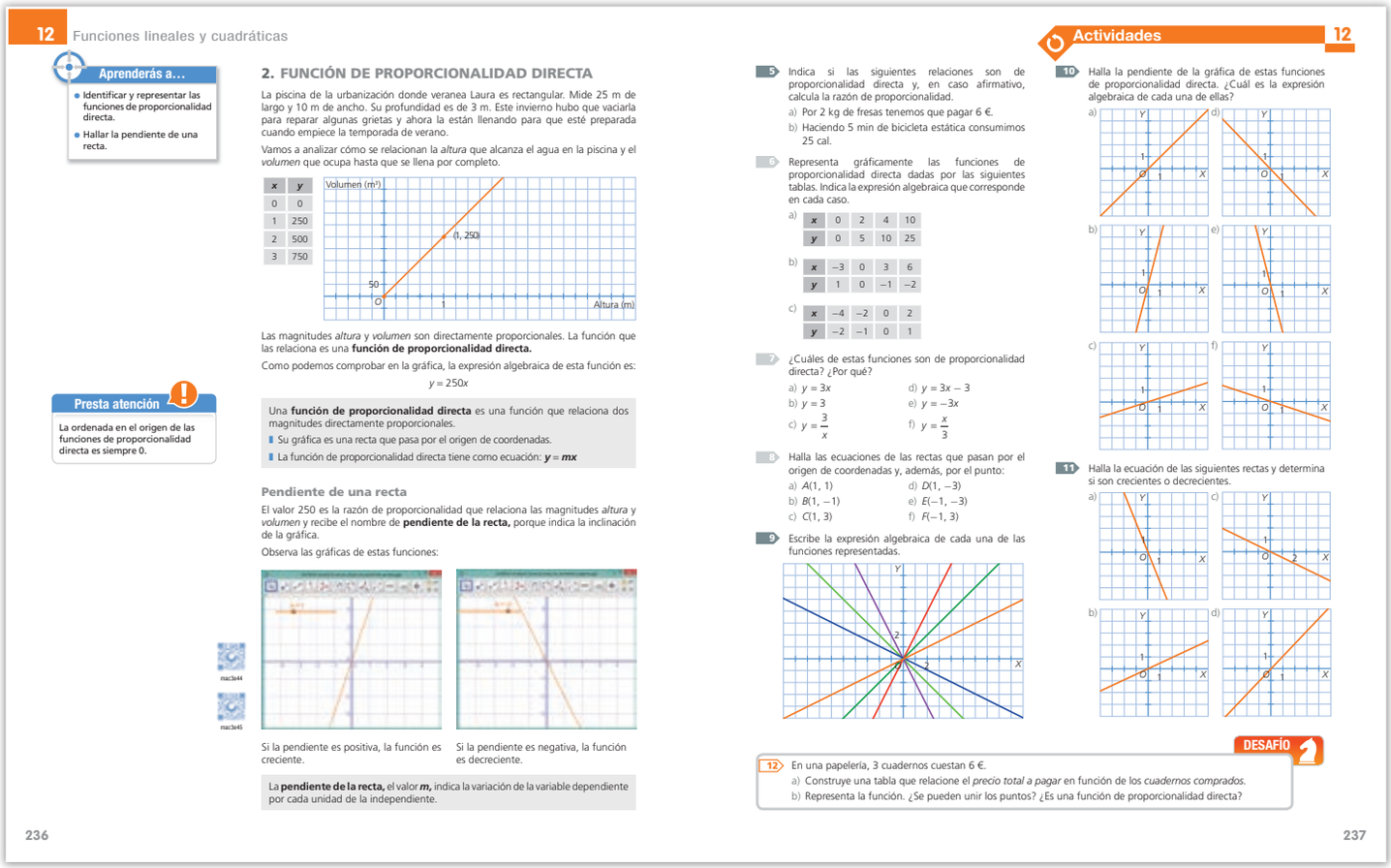


Desafío

4 Reflexiona y responde a las siguientes cuestiones sin hacer anotaciones ni dibujos: ¿cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto (0, 5) y por el origen de coordenadas?, ¿y la de la recta que pasa por el punto (4, 0) y por el origen de coordenadas?

- La ecuación de la recta que pasa por el punto (0, 5) y por el origen de coordenadas: $x = 0$
- La ecuación de la recta que pasa por el punto (4, 0) y por el origen de coordenadas: $y = 0$

2. Función de proporcionalidad directa



12 Funciones lineales y cuadráticas

Aprenderás a…

- Identificar y representar las funciones de proporcionalidad directa.
- Hallar la pendiente de una recta.

Presta atención

La ordenada en el origen de las funciones de proporcionalidad directa es siempre 0.

2. FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA

La piscina de la urbanización donde veranea Laura es rectangular. Mide 25 m de largo y 10 m de ancho. Su profundidad es de 3 m. Este invierno hubo que vaciarla para reparar algunas grietas y ahora la están llenando para que esté preparada cuando empiece la temporada de verano.

Vamos a analizar cómo se relacionan la *altura* que alcanza el agua en la piscina y el *volumen* que ocupa hasta que se llena por completo.

x	y
0	0
1	250
2	500
3	750

Volumen (m³) (1, 250) 50 O 1 Altura (m)

Las magnitudes *altura* y *volumen* son directamente proporcionales. La función que las relaciona es una **función de proporcionalidad directa.**

Como podemos comprobar en la gráfica, la expresión algebraica de esta función es:

$$y = 250x$$

Una **función de proporcionalidad directa** es una función que relaciona dos magnitudes directamente proporcionales.

- Su gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas.
- La función de proporcionalidad directa tiene como ecuación: $y = mx$

Pendiente de una recta

El valor 250 es la razón de proporcionalidad que relaciona las magnitudes *altura* y *volumen* y recibe el nombre de **pendiente de la recta,** porque indica la inclinación de la gráfica.

Observa las gráficas de estas funciones:

mac3e44 mac3e45

Si la pendiente es positiva, la función es creciente. Si la pendiente es negativa, la función es decreciente.

La **pendiente de la recta,** el valor ***m,*** indica la variación de la variable dependiente por cada unidad de la independiente.

236

Actividades 12

5 Indica si las siguientes relaciones son de proporcionalidad directa y, en caso afirmativo, calcula la razón de proporcionalidad.
a) Por 2 kg de fresas tenemos que pagar 6 €.
b) Haciendo 5 min de bicicleta estática consumimos 25 cal.

6 Representa gráficamente las funciones de proporcionalidad directa dadas por las siguientes tablas. Indica la expresión algebraica que corresponde en cada caso.

a)

x	0	2	4	10
y	0	5	10	25

b)

x	−3	0	3	6
y	1	0	−1	−2

c)

x	−4	−2	0	2
y	−2	−1	0	1

7 ¿Cuáles de estas funciones son de proporcionalidad directa? ¿Por qué?
a) $y = 3x$ d) $y = 3x - 3$
b) $y = 3$ e) $y = -3x$
c) $y = \frac{3}{x}$ f) $y = \frac{x}{3}$

8 Halla las ecuaciones de las rectas que pasan por el origen de coordenadas y, además, por el punto:
a) $A(1, 1)$ d) $D(1, -3)$
b) $B(1, -1)$ e) $E(-1, -3)$
c) $C(1, 3)$ f) $F(-1, 3)$

9 Escribe la expresión algebraica de cada una de las funciones representadas.

10 Halla la pendiente de la gráfica de estas funciones de proporcionalidad directa. ¿Cuál es la expresión algebraica de cada una de ellas?

11 Halla la ecuación de las siguientes rectas y determina si son crecientes o decrecientes.

DESAFÍO

12 En una papelería, 3 cuadernos cuestan 6 €.
a) Construye una tabla que relacione el *precio total a pagar* en función de los *cuadernos comprados.*
b) Representa la función. ¿Se pueden unir los puntos? ¿Es una función de proporcionalidad directa?

237

Sugerencias didácticas

Mediante la confección de la tabla que relacione dos magnitudes directamente proporcionales plantearemos a los alumnos la actividad de la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.

Para que comprendan qué es la pendiente de una la recta conviene recordar que es una constante de proporcionalidad directa y explicar su significado geométrico.

Puede resultarles difícil la obtención de la expresión algebraica si les proporcionamos solo la gráfica de la función por lo que hay que insistir en que la pendiente indica la variación de la variable dependiente por cada unidad de la independiente. Para que lo entiendan bien es muy recomendable que dibujemos en unos mismos ejes de coordenadas las gráficas de cuatro funciones con las pendientes que se indican: entero positivo, entero negativo, fraccionario positivo y fraccionario negativo.

Es importante que los alumnos relacionen la pendiente de la recta con la monotonía de la función, este concepto les resultará sencillo de comprender.

Para completar la explicación será de gran utilidad utilizar el recurso TIC.

GeoGebra. FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA

En estos dos recursos aparecen las representaciones gráficas de funciones de proporcionalidad directa. En ambos, al mover el deslizador podemos observar cómo varía la pendiente de la recta. En el primer caso, los valores de *m* son siempre positivos, por tanto, las funciones son crecientes; y en el segundo, los valores son negativos, las funciones son siempre decrecientes.

Este recurso puede utilizarse en clase como apoyo a la explicación de la pendiente de una función lineal o para proponer a los alumnos que deduzcan la relación entre la pendiente y la representación gráfica de la función.

Soluciones de las actividades

5 Indica si las siguientes relaciones son de proporcionalidad directa y, en caso afirmativo, calcula la razón de proporcionalidad.

a) Por 2 kg de fresas tenemos que pagar 6 €.

b) Haciendo 5 min de bicicleta estática consumimos 25 cal.

a) Si es relación de proporcionalidad directa de constante: $m = 3$

b) Si es relación de proporcionalidad directa de constante: $m = 5$

6 Representa gráficamente las funciones de proporcionalidad directa dadas por las siguientes tablas. Indica la expresión algebraica que corresponde en cada caso.

a)

x	0	2	4	10
y	0	5	10	25

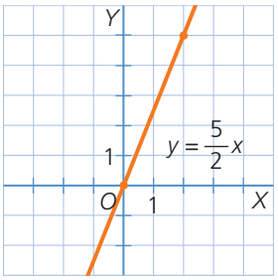
b)

x	−3	0	3	6
y	1	0	−1	−2

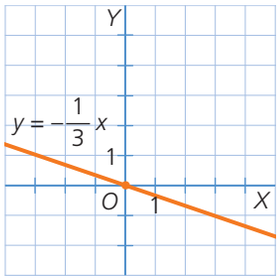
c)

x	−4	−2	0	2
y	−2	−1	0	−1

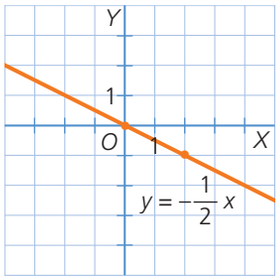
a)



b)



c)



7 ¿Cuáles de estas funciones son de proporcionalidad directa? ¿Por qué?

a) $y = 3x$ **b)** $y = 3$ **c)** $y = \frac{3}{x}$ **d)** $y = 3x - 3$ **e)** $y = -3x$ **f)** $y = \frac{x}{3}$

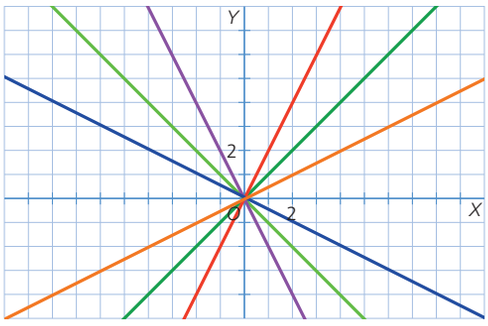
Son de proporcionalidad directa las funciones de los apartados **a)**, **e)** y **f)** porque, en las tres, la ordenada en el origen es 0.

8 Halla las ecuaciones de las rectas que pasan por el origen de coordenadas y, además, por el punto:

a) $A(1, 1)$ **b)** $B(1, -1)$ **c)** $C(1, 3)$ **d)** $D(1, -3)$ **e)** $E(-1, -3)$ **f)** $F(-1, 3)$

a) $y = x$ **b)** $y = -x$ **c)** $y = 3x$ **d)** $y = -3x$ **e)** $y = 3x$ **f)** $y = -3x$

9 Escribe la expresión algebraica de cada una de las funciones representadas.



Naranja: $y = \frac{1}{2}x$

Verde oscura: $y = x$

Roja: $y = 2x$

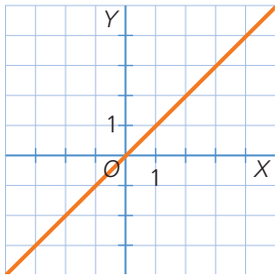
Morada: $y = -2x$

Verde clara: $y = -x$

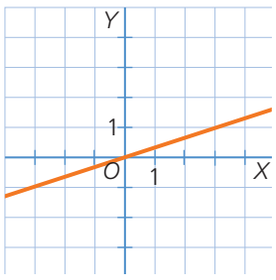
Azul: $y = -\frac{1}{2}x$

10 Halla la pendiente de la gráfica de estas funciones de proporcionalidad directa. ¿Cuál es la expresión algebraica de cada una de ellas?

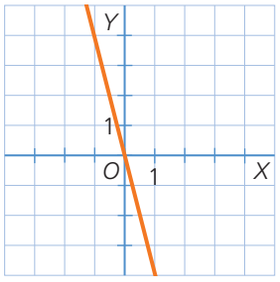
a)



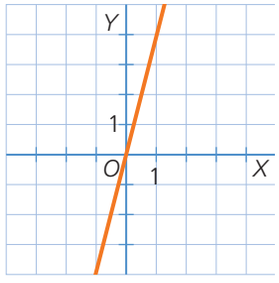
c)



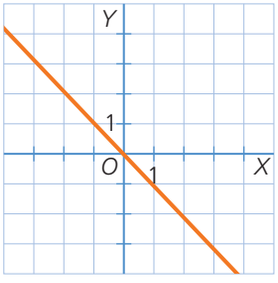
e)



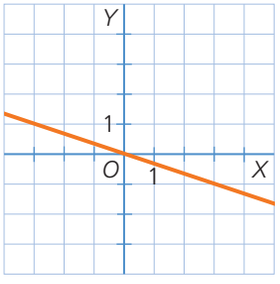
b)



d)



f)



a) $m = 1$
$y = x$

b) $m = 4$
$y = 4x$

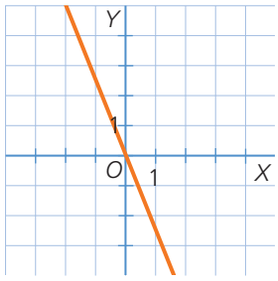
c) $m = \frac{1}{3}$
$y = \frac{1}{3}x$

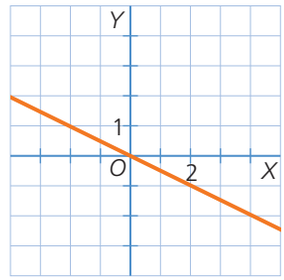
d) $m = -1$
$y = -x$

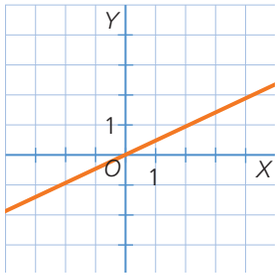
e) $m = -4$
$y = -4x$

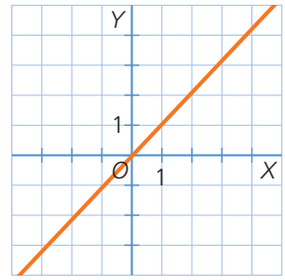
f) $m = -\frac{1}{3}$
$y = -\frac{1}{3}x$

11 Halla la ecuación de las siguientes rectas y determina si son crecientes o decrecientes.

a)


c)


b)


d)


a) $y = -\frac{2}{5}x$ Decreciente

b) $y = \frac{1}{2}x$ Creciente

c) $y = -\frac{1}{2}x$ Decreciente

d) $y = x$ Creciente

Desafío

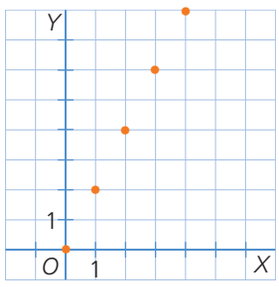
12 En una papelería, 3 cuadernos cuestan 6 €.

a) Construye una tabla que relacione el *precio total a pagar* en función de los *cuadernos comprados*.

b) Representa la función. ¿Se pueden unir los puntos? ¿Es una función de proporcionalidad directa?

a)

Número de cuadernos	0	1	2	3	4	…
Precio total en euros	0	2	4	6	8	…

b)


No se pueden unir los puntos porque el número de cuadernos es un número natural.

Sí, es una función de proporcionalidad directa.

3. Funciones lineales

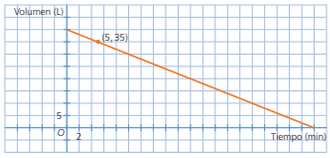
Aprenderás a…

- Representar las funciones lineales comprendiendo el significado de la pendiente y la ordenada en el origen.
- Hallar la expresión algebraica de una función lineal dada por una tabla, por dos de los puntos por los que pasa o conociendo la pendiente y uno de sus puntos.

3. FUNCIONES LINEALES

Al comenzar una prueba de resistencia para el motor de un coche, el depósito de combustible tenía 40 L. Tras mantener las revoluciones durante 5 min, en el depósito quedan 35 L. ¿Cuál será el volumen de combustible según el tiempo que mantengamos el motor a las mismas revoluciones?

x	y
0	40
5	35
10	30
15	25
20	20



Podemos obtener el volumen mediante la ecuación de la recta. Hemos representado una **función lineal** con la expresión: $y = -x + 40$

El valor inicial de 40 L corresponde a la ordenada en el origen: $n = 40$

La pendiente es: $m = -1$

Por ser negativa, la función es decreciente.

Una **función lineal** es una función polinómica de grado 1 o 0 que tiene como ecuación: $\boldsymbol{y = mx + n}$

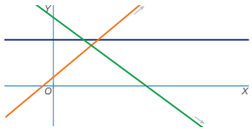
Su gráfica es una recta cuya **pendiente** es $\boldsymbol{m}$ y cuya **ordenada en el origen** es $\boldsymbol{n}$.

Las funciones lineales son funciones continuas que cortan al eje Y en el punto $(0, n)$.

Si $n = 0$, son funciones de proporcionalidad directa y tienen simetría impar.

Las funciones lineales son:

- Constantes si $m = 0$
- Crecientes si $m > 0$.
- Decrecientes si $m < 0$.



EJERCICIO RESUELTO

Halla la pendiente, la ordenada en el origen y los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones. Indica también si son crecientes o decrecientes.

a) $y = 2x - 1$ b) $y = -3x + 2$

Solución

a) $m = 2$, $n = -1$

Cortes con los ejes:

- Con el eje X: $y = 0 \rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0\right)$
- Con el eje Y: $x = 0 \rightarrow (0, -1)$

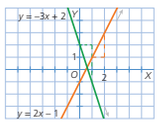
$m = 2 > 0 \rightarrow$ La función es creciente.

b) $m = -3$, $n = 2$

Cortes con los ejes:

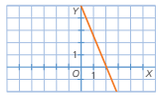
- Con el eje X: $y = 0 \rightarrow \left(\frac{2}{3}, 0\right)$
- Con el eje Y: $x = 0 \rightarrow (0, 2)$

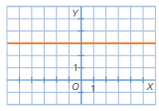
$m = -3 < 0 \rightarrow$ La función es decreciente.

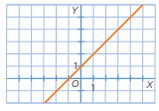


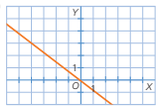
Actividades 12

13 Observa las gráficas y determina la pendiente y la ordenada en el origen de las rectas.

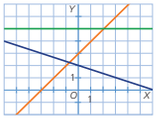
a)


b)


c)


d)


14 Dadas las siguientes rectas, halla la pendiente de cada una y justifica si son crecientes, decrecientes o constantes.



15 Representa utilizando los mismos ejes de coordenadas y describe las características de las funciones.

a) $y = 2x - 2$

b) $y = -2x - 2$

EJERCICIO RESUELTO

Halla la ecuación de la recta en cada caso.

a) **Si pasa por el punto $A(0, 2)$ y su pendiente es 5.**

b) **Si pasa por el punto $A(2, 3)$ y su pendiente es 5.**

c) **Si pasa por los puntos $A(1, 2)$ y $B(4, 11)$.**

Solución

a) $m = 5 \rightarrow y = 5x + n$

Si pasa por $A(0, 2) \rightarrow n = 2$

Entonces, la ecuación de la recta es: $y = 5x + 2$

b) $m = 5 \rightarrow y = 5x + n$

Al pasar por $(2, 3) \rightarrow 3 = 10 + n \rightarrow n = -7$

La ecuación es: $y = 5x - 7$

c) Si pasa por $A(1, 2) \rightarrow 2 = m + n$

Al pasar por $B(4, 11) \rightarrow 11 = 4m + n$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} m + n = 2 \\ 4m + n = 11 \end{array}\right\} \rightarrow 3m = 9 \rightarrow m = 3$$

Sustituimos en la primera ecuación:

$$3 + n = 2 \rightarrow n = -1$$

La recta tiene por ecuación: $y = 3x - 1$

16 Escribe la ecuación de la recta que pasa por el punto $(0, 5)$ si su pendiente es 3.

17 Halla la ecuación de la recta sabiendo que uno de sus puntos es $A(3, 4)$ y su pendiente es 2. Representa la función.

18 Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(3, -1)$ y $B(4, 1)$.

19 Halla la ecuación de la recta pasa por los puntos $A(-1, 0)$ y $B(2, 0)$.

20 Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(0, 5)$ y $B(5, 0)$.

Investiga

21 Representa las siguientes funciones y dibuja dos rectas paralelas a cada una. ¿Cómo son las pendientes de cada recta y sus paralelas?

a) $y = 3x - 6$ c) $y = 2x + 5$

b) $y = x - 6$ d) $y = -3x - 1$

Sugerencias didácticas

Conviene introducir este tipo de funciones proponiendo a los alumnos que dibujen la gráfica de una función a partir de una tabla de valores.

Es fundamental que identifiquen las características más relevantes de este tipo de funciones, esto es, la relación de la pendiente con la monotonía así como el punto de corte de la función con el eje de ordenadas.

Será muy sencillo hacerles ver que si $n = 0$ la función es de proporcionalidad directa y si $m = 0$ la función es constante, será suficiente referirse a ejemplos de los dos epígrafes anteriores.

Debemos poner ejemplos para hablarles de que el paralelismo entre rectas se traduce en igualdad entre sus pendientes y que las rectas secantes son las que tienen pendientes diferentes.

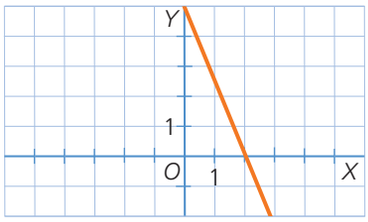
Es importante que aclaremos que $y = mx + n$ se llama expresión algebraica, pero también *ecuación* de una recta y que es, ni más ni menos, la *condición* existente entre las coordenadas de los puntos que están alineados. Por ejemplo, todos los puntos cuya ordenada sea el doble del valor de la abscisa más 1 están alineados, la condición en forma de ecuación se escribe $y = 2x + 1$.

Los alumnos saben ya que una recta queda definida por dos puntos, es el momento de que aprendan a obtener no solo la gráfica sino también su ecuación. Debemos realizar ejercicios para mostrarles cómo hallar la ecuación de una recta conocida la pendiente y un punto, y también como hallar la ecuación si conocemos dos puntos por los que pasa. Como es muy probable que tengan dificultades basadas en el cálculo, las ecuaciones o los sistemas hemos de resaltar todos los pasos de nuestra explicación.

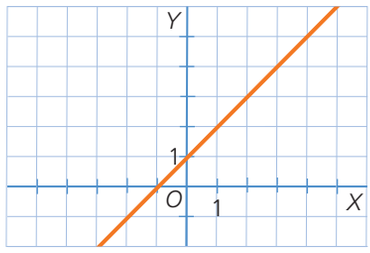
Soluciones de las actividades

13 Observa las gráficas y determina la pendiente y la ordenada en el origen de las rectas.

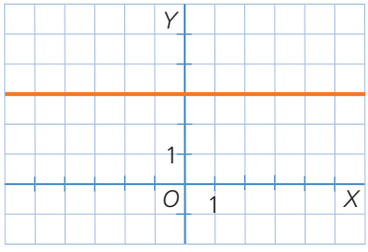
a)



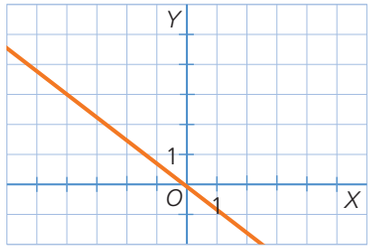
c)



b)

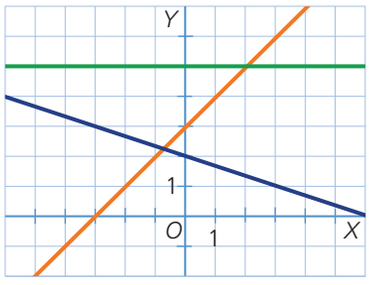


d)



a) $m = -\frac{5}{2}$; $n = 5$ **b)** $m = 0$; $n = 3$ **c)** $m = 1$; $n = 1$ **d)** $m = -\frac{3}{4}$; $n = 0$

14 Dadas las siguientes rectas, halla la pendiente de cada una y justifica si son crecientes, decrecientes o constantes.



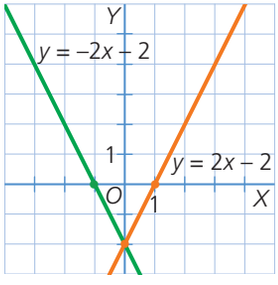
Naranja: $m = 1 > 0 \rightarrow$ Creciente

Azul: $m = -\frac{1}{3} < 0 \rightarrow$ Decreciente

Verde: $m = 0 \rightarrow$ Constante

15 Representa utilizando los mismos ejes de coordenadas y describe las características de las funciones.

a) $y = 2x - 2$ **b)** $y = -2x - 2$



a) Es una función lineal de pendiente $m = 2$ y ordenada en el origen $n = -2$.

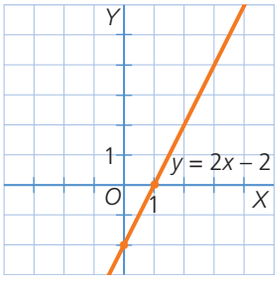
b) Es una función lineal de pendiente $m = -2$ y ordenada en el origen $n = -2$.

16 Escribe la ecuación de la recta que pasa por el punto (0, 5) si su pendiente es 3.

$y = 3x + 5$

17 Halla la ecuación de la recta sabiendo que uno de sus puntos es $A(3, 4)$ y su pendiente es 2. Representa la función.

$y = 2x - 2$



18 Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(3, -1)$ y $B(4, 1)$.

Resolvemos el sistema: $\left.\begin{array}{l} 3m + n = -1 \\ 4m + n = 1 \end{array}\right\} \rightarrow -m = -2 \rightarrow m = 2$

Sustituimos en la primera ecuación: $3 \cdot 2 + n = -1 \rightarrow n = -7$

La recta tiene por ecuación: $y = 2x - 7$

19 Halla la ecuación de la recta pasa por los puntos $A(-1, 0)$ y $B(2, 0)$.

Son puntos que pertenecen al eje de abscisas, la recta es $y = 0$.

20 Halla la ecuación de la recta pasa por los puntos $A(0, 5)$ y $B(5, 0)$.

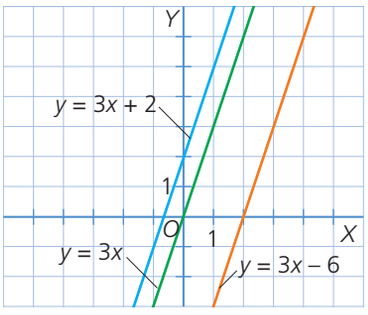
La ecuación de la recta es $y = -x + 5$.

Investiga

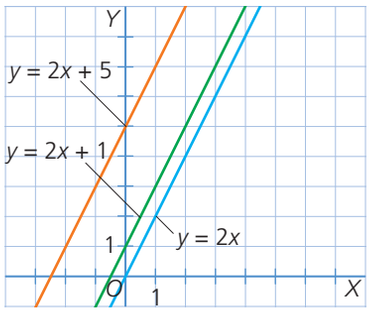
21 Representa las siguientes funciones y dibuja dos rectas paralelas a cada una. ¿Cómo son las pendientes de cada recta y sus paralelas?

a) $y = 3x - 6$ **b)** $y = x - 6$ **c)** $y = 2x + 5$ **d)** $y = -3x - 1$

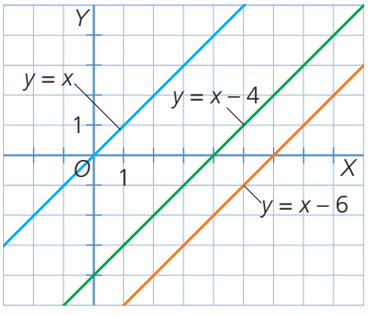
a) $m = 3$



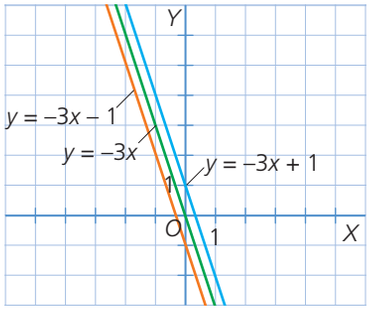
c) $m = 2$



b) $m = 1$



d) $m = -3$



Una vez representadas las funciones propuestas, las paralelas se obtienen manteniendo la pendiente y variando la ordenada en el origen.

4. Ecuaciones de la recta

Aprenderás a…

- Expresar una recta mediante distintas ecuaciones.

4. ECUACIONES DE LA RECTA

En la siguiente tabla puedes ver la misma recta escrita con expresiones diferentes.

Ecuación	explícita	punto-pendiente	por dos puntos	general
Ejemplo	$y = 2x + 4$	$y - 4 = 2(x - 0)$	$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-4}{6-4}$	$2x - y + 4 = 0$

Transponiendo términos, la ecuación de la recta cambia su aspecto.

La recta $y = 2x + 4$ tiene pendiente 2 y su ordenada es 4, es decir, corta al eje Y en el punto (0, 4).

Ecuación explícita: $y = mx + n$

- m es la pendiente de la recta.
- n es la ordenada en el origen.

La expresión $y - 4 = 2(x - 0)$ corresponde a la misma recta.

Como (1, 6) pertenece a la recta; la expresión $y - 6 = 2(x - 1)$ también la representa.

Ecuación punto-pendiente: $y - a_2 = m(x - a_1)$

- m es la pendiente de la recta.
- $A(a_1, a_2)$ es un punto por el que pasa la recta.

Podemos expresar la recta de la forma: $\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-4}{6-4} \rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y-4}{2}$

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos: $\frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2}$

- $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$ son puntos por los que pasa la recta.

Si agrupamos todos los términos de la ecuación en un solo miembro, tenemos la expresión: $2x - y + 4 = 0$

Ecuación general o implícita: $Ax + By + C = 0$

Presta atención

Si la recta pasa por los puntos $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$, su pendiente viene dada por la expresión:

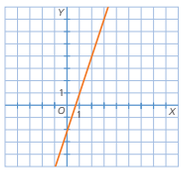
$$m = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$$

Así, podemos escribir la ecuación de la recta en forma punto-pendiente:

$$y - a_2 = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}(x - a_1)$$

EJERCICIO RESUELTO

Escribe las distintas ecuaciones de esta recta.



Solución

Observamos que la pendiente es: $m = 3$, y la ordenada es: $n = -2$

- Ecuación explícita: $y = 3x - 2$

Hallamos un punto dando un valor a x; por ejemplo, si $x = 2$, el punto es (2, 4).

- Ecuación punto-pendiente: $y - 4 = 3(x - 2)$

Si la ordenada es $n = -2$, la recta pasa por el punto (0, −2).

- Ecuación de la recta que pasa por dos puntos:

$$\frac{x-2}{0-2} = \frac{y-4}{-2-4} \rightarrow \frac{x-2}{-2} = \frac{y-4}{-6} \rightarrow \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{3}$$

- Ecuación general: $y = 3x - 2 \rightarrow 3x - y - 2 = 0$

Actividades 12

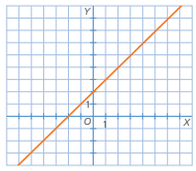
22 Escribe la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto $A(2, 3)$ y cuya pendiente es 4.

23 Halla la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, sabiendo que dos de ellos son $A(1, 3)$ y $B(2, 5)$.

24 Obtén la ecuación general de la recta dada por la expresión:

$$y = x - 2$$

25 Observa la recta representada.



Halla su pendiente y calcula la ecuación punto-pendiente.

26 Halla dos de los puntos por los que pasan estas rectas:

a) $y = 3x + 3$

b) $y - 1 = 2(x - 4)$

c) $\frac{x-1}{4-1} = \frac{y-0}{5-0}$

d) $3x - y + 6 = 0$

27 Calcula la ordenada en el origen de las rectas propuestas.

a) $x + 3y + 6 = 0$

b) $y + 1 = 3(x - 1)$

28 Halla la pendiente de estas rectas.

a) $12x - 3y + 1 = 0$

b) $y + 1 = -5(x - 1)$

c) $\frac{x-1}{5-2} = \frac{y-4}{3-1}$

29 Escribe la ecuación explícita e indica el valor de la pendiente de la recta:

$$x + 3y + 3 = 0$$

30 Obtén la ecuación punto-pendiente de la recta dada por la expresión:

$$2x - y - 5 = 0$$

31 Dada la recta $y - 4 = 2(x - 1)$, halla:

a) El valor de la pendiente.

b) Su ecuación explícita.

c) Dos de los puntos por los que pasa.

d) La ecuación como recta que pasa por dos puntos.

e) Su ecuación general.

Presta atención

Si despejamos y en la ecuación general:

$$Ax + By + C = 0$$

obtenemos:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Si comparamos con la ecuación explícita:

$$y = mx + n$$

$$m = -\frac{A}{B} \qquad n = -\frac{C}{B}$$

DESAFÍO

32 La recta $y = mx + 2$ corta a la parte positiva de los ejes de coordenadas formando un triángulo rectángulo. ¿Cuánto debe valer m para que el área del triángulo sea de 16 unidades cuadradas?

Sugerencias didácticas

Es importante que los alumnos se vayan familiarizando con las diferentes formas de expresión de la ecuación de la recta: ecuación explícita, punto pendiente, por dos puntos y general. Debemos transmitir el gusto por aprender conceptos y relaciones técnicas nuevas así como reconocer la utilidad de determinar la ecuación de una recta.

Partiendo de cualquiera de ellas aprenderán a obtener el resto de las expresiones, esto es, a expresar las distintas formas de relación entre las coordenadas de los puntos de una recta.

Para empezar debemos explicar que la función lineal $y = mx + n$ se denomina forma explícita de la recta, y a partir de un ejemplo, trasponiendo términos deduciremos y presentaremos las restantes ecuaciones.

Es recomendable que los alumnos aprendan a escribir la ecuación punto-pendiente, explícita y general partiendo de la que pasa por dos puntos. Debemos prestar bastante atención porque pueden aparecer dificultades basadas en la transposición de términos.

Es necesario que aprendan a identificar dos puntos y la pendiente de una recta dada en cualquiera de sus formas.

Soluciones de las actividades

22 Escribe la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto $A(2, 3)$ y cuya pendiente es 4.

$y - 3 = 4(x - 2)$

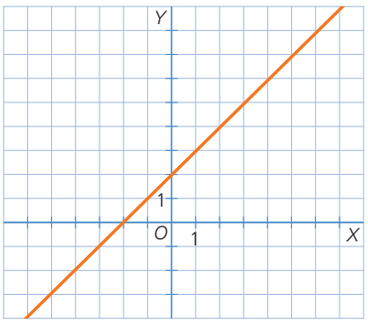
23 Halla la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, sabiendo que dos de ellos son $A(1, 3)$ y $B(2, 5)$.

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-3}{5-3} \rightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2}$$

24 Obtén la ecuación general de la recta dada por la expresión: $y = x - 2$

$x - y - 2 = 0$

25 Observa la recta representada. Halla su pendiente y calcula la ecuación punto-pendiente.



$m = 1$

$y - 2 = 1(x - 0)$

26 Halla dos de los puntos por los que pasan estas rectas:

a) $y = 3x + 3$ **b)** $y - 1 = 2(x - 4)$ **c)** $\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-0}{5-0}$ **d)** $3x - y + 6 = 0$

a)

x	0	1
y	3	6

b)

x	0	4
y	−7	1

c)

x	1	3
y	0	5

d)

x	0	−1
y	6	3

27 Calcula la ordenada en el origen de las rectas propuestas.

a) $x + 3y + 6 = 0$ **b)** $y + 1 = 3(x - 1)$

a) Si $x = 0 \rightarrow y = -2$: $n = -2$ b) Si $x = 0 \rightarrow y = -4$: $n = -4$

28 Halla la pendiente de estas rectas.

a) $12x - 3y + 1 = 0$ **b)** $y + 1 = -5(x - 1)$ **c)** $\frac{x-1}{5-2} = \frac{y-4}{3-1}$

a) $y = 4x + \frac{1}{3}$, la pendiente es: $m = 4$ b) $m = -5$ c) $m = \frac{2}{3}$

29 Escribe la ecuación explícita e indica el valor de la pendiente de la recta: $x + 3y + 3 = 0$

$x + 3y + 3 = 0 \rightarrow 3y = -x - 3 \rightarrow y = -\frac{x}{3} - 1$ es la ecuación explícita y la pendiente es: $m = -\frac{1}{3}$

30 Obtén la ecuación punto-pendiente de la recta dada por la expresión: $2x - y - 5 = 0$

La recta pasa por el punto (0, −5), la ecuación explícita es $y = 2x - 5$.

La ecuación punto-pendiente es: $y + 5 = 2(x - 0)$

31 Dada la recta $y - 4 = 2(x - 1)$, halla:

a) El valor de la pendiente.

b) Su ecuación explícita.

c) Dos de los puntos por los que pasa.

d) La ecuación como recta que pasa por dos puntos.

e) Su ecuación general.

a) $m = 2$

b) $y - 4 = 2(x - 1) \rightarrow y = 2(x - 1) + 4$

$\rightarrow y = 2x - 2 + 4$, la ecuación es: $y = 2x + 2$

c)

x	0	1
y	2	4

d) $\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-2}{4-2} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2}$

e) $2x - y + 2 = 0$

Desafío

32 La recta $y = mx + 2$ corta a la parte positiva de los ejes de coordenadas formando un triángulo rectángulo. ¿Cuánto debe valer m para que el área del triángulo sea de 16 unidades cuadradas?

La recta corta al eje de ordenadas en (0, 2), por tanto la altura del triángulo es: $h = 2$

$\frac{\text{Base} \cdot \text{Altura}}{2} = 16 \rightarrow \frac{\text{Base} \cdot 2}{2} = 16 \rightarrow \text{Base} = 16$

La recta debe cortar al eje de abscisas en (16, 0), para ello m debe ser: $m = \frac{0-2}{16-0} = -\frac{1}{8}$

5. Funciones cuadráticas

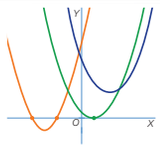
Aprenderás a…

- Conocer las características de funciones cuadráticas.
- Representar parábolas estudiando el vértice, los puntos de corte con los ejes y el eje de simetría.

Recuerda

Podemos representar las funciones con la letra *y* o usando la expresión *f*(*x*).

Presta atención



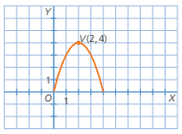
- Si la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

tiene dos soluciones, la función cuadrática corta al eje *X* en dos puntos.
- Si la ecuación tiene una sola solución, el punto de corte es precisamente el vértice.
- Si no tiene soluciones, la función no corta al eje *X*.

5. FUNCIONES CUADRÁTICAS

Cuando presenciamos un partido de baloncesto y vemos cómo un jugador consigue un tiro libre, podemos estudiar la curva que describe el balón en movimiento.



La gráfica de la función que relaciona el *tiempo transcurrido* desde el lanzamiento y la *altura* a la que se encuentra el balón corresponde a una curva a la que denominamos **parábola.**

Observamos que la función es continua y que tiene dos ramas: una creciente, hasta los 2 s, cuando el balón se encuentra a 4 m del suelo; y otra decreciente. El punto (2, 4) es el **vértice** de la parábola.

Si trazamos una recta paralela al eje *Y* que pase por el vértice, podemos observar que la parábola es simétrica respecto a ella.

Una **función cuadrática** es una función polinómica de grado 2 cuya expresión algebraica es de la forma:

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \text{siendo } a \neq 0$$

Su gráfica es una **parábola,** una curva con un extremo relativo en el **vértice,** formada por dos ramas simétricas respecto al **eje de simetría.**

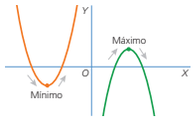
Características de las parábolas

Dibujamos las **ramas de la parábola:**

- Abiertas hacia arriba, si $a > 0$.
- Abiertas hacia abajo, si $a < 0$.

El **vértice** de la parábola es:

- Un mínimo, si $a > 0$.
- Un máximo, si $a < 0$.

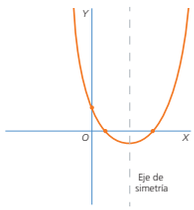


La abscisa del vértice es:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

El **eje de simetría** es una recta de ecuación:

$$x = -\frac{b}{2a}$$



Para calcular los **puntos de corte:**

- Con el eje *X*, resolvemos la ecuación:

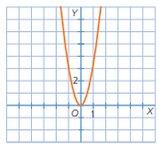
$$ax^2 + bx + c = 0$$

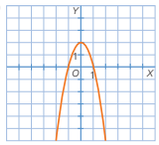
- El corte con el eje *Y* lo obtenemos al sustituir $x = 0$:

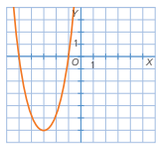
$$f(0) = c \rightarrow (0, c)$$

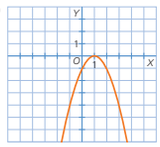
Actividades 12

33 Observa las gráficas y determina el vértice, el eje de simetría y los puntos de corte con los ejes. ¿Qué son los vértices: máximos o mínimos?

a)


b)


c)


d)


EJERCICIO RESUELTO

Indica los elementos característicos de la función $f(x) = x^2 - 6x + 8$, y represéntala gráficamente.

Solución

Observamos que: $a = 1 > 0$

La parábola tiene las ramas abiertas hacia arriba.

Vértice:

$$\left.\begin{array}{l} x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-6}{2} = 3 \\ f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = -1 \end{array}\right| \rightarrow V(3, -1)$$

Eje de simetría: $x = 3$

Puntos de corte con los ejes:

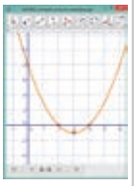
- Con el eje *X*:

Resolvemos:

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} \rightarrow \left|\begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \end{array}\right.$$

La parábola corta en los puntos: (2, 0) y (4, 0)



- Con el eje *Y*:

Si $x = 0 \rightarrow f(0) = 8$

La parábola corta en: (0, 8)

mac3e46

34 Representa las funciones cuadráticas hallando sus elementos característicos.

a) $f(x) = x^2 - 6x$
b) $f(x) = -x^2 + 6x$
c) $f(x) = x^2 + 4x + 3$
d) $f(x) = -x^2 - 4x - 3$

35 Indica los elementos característicos de estas funciones y represéntalas gráficamente.

a) $f(x) = x^2 + 2$
b) $f(x) = -x^2 + 2$
c) $f(x) = 2x^2 + 3$
d) $f(x) = -2x^2 + 3$

Investiga

36 Representa las funciones utilizando los mismos ejes de coordenadas.

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = -x^2$ c) $f(x) = 2x^2$ d) $f(x) = -2x^2$ e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ f) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$

- ¿Qué elementos característicos comparten?
- Explica cómo afecta el valor del coeficiente de x^2 a su representación gráfica.

Sugerencias didácticas

Los alumnos por primera vez conocerán qué es una función polinómica de grado dos, aprenderán a calcular los elementos característicos (coordenadas del vértice, eje de simetría y puntos de corte con los ejes) y a representarla gráficamente.

Es conveniente citar que por las propiedades que tienen estas funciones, también llamadas parábolas, son aplicadas en la construcción de radares, focos luminosos y antenas.

La introducción debemos plantearla describiendo gráficos cercanos a los alumnos que puedan ser modelizadas mediante este tipo de funciones.

Puede presentar dificultades el cálculo de la ordenada del vértice, debemos hacer hincapié en asociarlo con el valor numérico de la función en el valor de la abscisa.

Debemos realizar bastantes ejercicios para asegurarnos de que han adquirido la destreza para calcular los elementos característicos y son capaces de dibujar funciones cuadráticas.

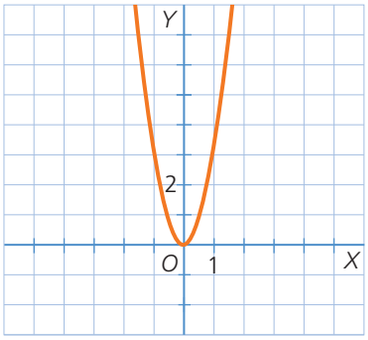
GeoGebra. GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Se muestra la gráfica de la función cuadrática del ejercicio resuelto. Puede utilizarse pulsando sobre la barra de navegación para ver el proceso paso a paso: primero se colocan los puntos y a continuación la parábola, o activando el botón Reproduce de modo que la construcción se realizará automáticamente sin necesidad de interacción con el archivo. Este recurso completa la explicación del libro. Puede proponerse a los alumnos representar otras funciones sencillas o comprobar los resultados de los ejercicios propuestos.

Soluciones de las actividades

33 Observa las gráficas y determina el vértice, el eje de simetría y los puntos de corte con los ejes. ¿Qué son los vértices: máximos o mínimos?

a)

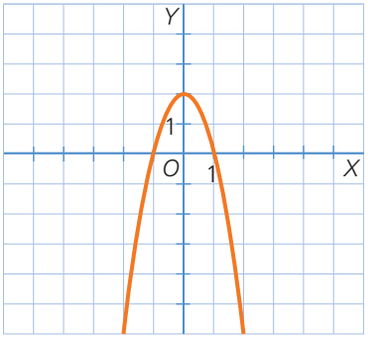


a) Vértice: $V(0, 0) \rightarrow$ Mínimo

Eje de simetría: $x = 0$

Puntos de corte con los ejes: (0, 0)

b)



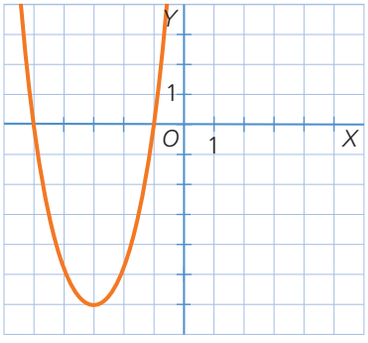
b) Vértice: $V(0, 2) \rightarrow$ Máximo

Eje de simetría: $x = 0$

Puntos de corte con los ejes:

Con el eje X la parábola corta en los puntos (1, 0) y (−1, 0), con el eje Y corta en (0, 2).

c)



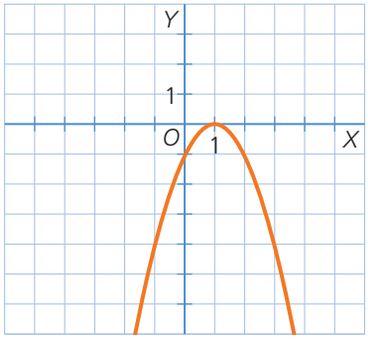
c) Vértice: $(-3, -6) \rightarrow$ Mínimo

Eje de simetría: $x = -3$

Puntos de corte con los ejes:

Con el eje X la parábola corta en los puntos (−1, 0) y (−5, 0), con el eje Y corta en $\left(0, \frac{15}{2}\right)$.

d)



d) Vértice: $V(1, 0) \rightarrow$ Máximo

Eje de simetría: $x = 1$

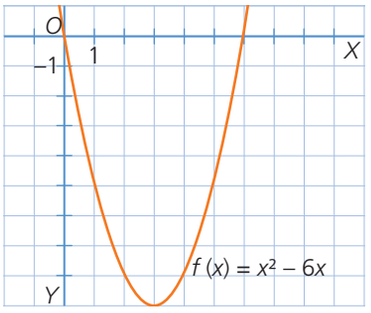
Puntos de corte con los ejes:

Con el eje X en (1, 0), con el eje Y corta en (0, −1).

34 Representa las funciones cuadráticas hallando sus elementos característicos.

a) $f(x) = x^2 - 6x$ **b)** $f(x) = -x^2 + 6x$ **c)** $f(x) = x^2 + 4x + 3$ **d)** $f(x) = -x^2 - 4x - 3$

a) $a = 1 > 0 \rightarrow$ La parábola tiene las ramas abiertas hacia arriba.



Vértice: $\left.\begin{array}{l} x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-6}{2} = 3 \\ f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 = -9 \end{array}\right\} \rightarrow V(3, -9)$

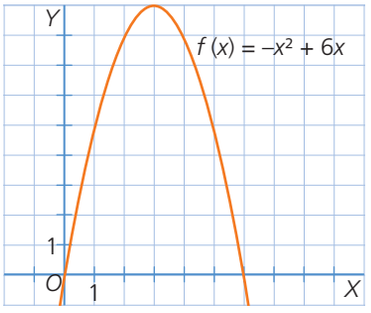
Eje de simetría: $x = 3$

Puntos de corte con los ejes:

- Con el eje X: $x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(x - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 6 \end{cases}$

  La parábola corta al eje X en los puntos (0, 0) y (6, 0).
- Con el eje Y: Si $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow$ La parábola corta en (0, 0).

b) $a = -1 < 0 \rightarrow$ La parábola tiene las ramas abiertas hacia abajo.



Vértice: $\left.\begin{array}{l} x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{6}{-2} = 3 \\ f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 = 9 \end{array}\right\} \rightarrow V(3, 9)$

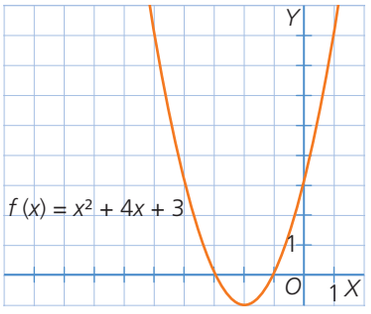
Eje de simetría: $x = 3$

Puntos de corte con los ejes:

- Con el eje X: $-x^2 + 6x = 0 \rightarrow x(-x + 6) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 6 \end{cases}$

  La parábola corta al eje X en los puntos (0, 0) y (6, 0).
- Con el eje Y: Si $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow$ La parábola corta en (0, 0).

c) $a = 1 > 0 \rightarrow$ La parábola tiene las ramas abiertas hacia arriba.



Vértice: $\left.\begin{array}{l} x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{4}{2} = -2 \\ f(-2) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 3 = -1 \end{array}\right\} \rightarrow V(-2, -1)$

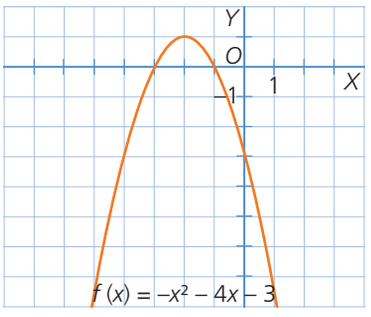
Eje de simetría: $x = -2$

Puntos de corte con los ejes:

- Con el eje X: $x^2 + 4x + 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \dfrac{-4 \pm 2}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

  La parábola corta en los puntos (–1, 0) y (–3, 0).
- Con el eje Y: Si $x = 0 \rightarrow f(0) = 3 \rightarrow$ La parábola corta en (0, 3).

d) $a = -1 < 0 \rightarrow$ La parábola tiene las ramas abiertas hacia abajo.



Vértice: $\left.\begin{array}{l} x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{-2} = -2 \\ f(-2) = -(-2)^2 - 4 \cdot (-2) - 3 = 1 \end{array}\right\} \rightarrow V(-2, 1)$

Eje de simetría: $x = -2$

Puntos de corte con los ejes:

- Con el eje X: $-x^2 - 4x - 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{4}}{-2} = \dfrac{4 \pm 2}{-2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

  La parábola corta en los puntos (–1, 0) y (–3, 0).
- Con el eje Y: Si $x = 0 \rightarrow f(0) = -3 \rightarrow$ La parábola corta en (0, –3).

35 Indica los elementos característicos de estas funciones y represéntalas gráficamente.

a) $f(x) = x^2 + 2$ **b)** $f(x) = -x^2 + 2$ **c)** $f(x) = 2x^2 + 3$ **d)** $f(x) = -2x^2 + 3$

a) $a = 1 > 0 \rightarrow$ La parábola tiene las ramas abiertas hacia arriba.

Vértice: $b = 0 \rightarrow V(0, 2)$

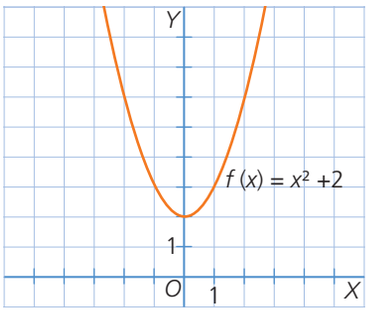
Eje de simetría: $x = 0$

Puntos de corte con los ejes:

- Con el eje X: $x^2 + 2 = 0 \rightarrow$ no tiene solución

  La parábola no corta al eje X.
- Con el eje Y:

  Si $x = 0 \rightarrow f(0) = 2 \rightarrow$ La parábola corta en (0, 2).



b) $a = -1 < 0 \rightarrow$ La parábola tiene las ramas abiertas hacia abajo.

Vértice: $b = 0 \rightarrow V(0, 2)$

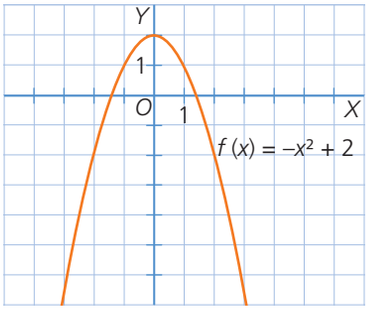
Eje de simetría: $x = 0$

Puntos de corte con los ejes:

- Con el eje X: $-x^2 + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ x_2 = -\sqrt{2} \end{cases}$

  La parábola corta al eje X en los puntos $(\sqrt{2}, 0)$ y $(-\sqrt{2}, 0)$.
- Con el eje Y:

  Si $x = 0 \rightarrow f(0) = 2 \rightarrow$ La parábola corta en (0, 2).



c) $a = 2 > 0 \rightarrow$ La parábola tiene las ramas abiertas hacia arriba.

Vértice: $b = 0 \rightarrow V(0, 3)$

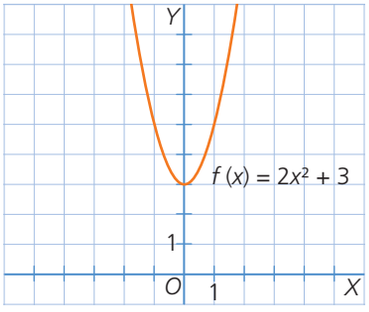
Eje de simetría: $x = 0$

Puntos de corte con los ejes:

- Con el eje X: $2x^2 + 3 = 0 \rightarrow$ no tiene solución

  La parábola no corta al eje X.
- Con el eje Y:

  Si $x = 0 \rightarrow f(0) = 3 \rightarrow$ La parábola corta en (0, 3).



d) $a = -2 < 0 \rightarrow$ La parábola tiene las ramas abiertas hacia abajo.

Vértice: $b = 0 \rightarrow V(0, 3)$

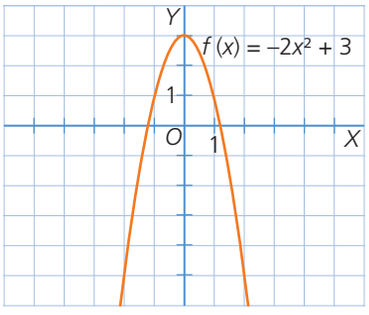
Eje de simetría: $x = 0$

Puntos de corte con los ejes:

- Con el eje X: $-2x^2 + 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \\ x_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$

  La parábola corta al eje X en los puntos $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right)$ y $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right)$.
- Con el eje Y:

  Si $x = 0 \rightarrow f(0) = 3 \rightarrow$ La parábola corta en (0, 3).



Investiga

36 Representa las funciones utilizando los mismos ejes de coordenadas.

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = -x^2$

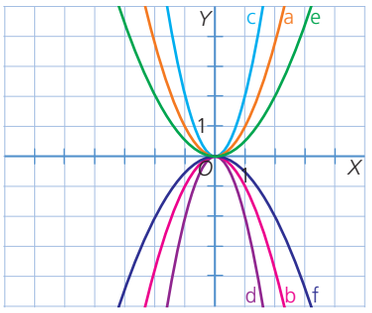
c) $f(x) = 2x^2$

d) $f(x) = -2x^2$

e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

f) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$

- ¿Qué elementos característicos comparten?
- Explica cómo afecta el valor del coeficiente de x^2 a su representación gráfica.



Todas tienen el vértice en el punto (0, 0).

Su eje de simetría el eje de ordenadas: $x = 0$

El coeficiente de x^2 en **a)**, **c)** y **e)** es mayor que cero por eso las parábolas están abiertas hacia arriba.

En **b)**, **d)** y **f)** el coeficiente de x^2 es menor de cero, las tres están abiertas hacia abajo.

6. Aplicaciones

Aprenderás a…

- Reconocer situaciones de la vida cotidiana en las que aparezcan funciones lineales o cuadráticas.

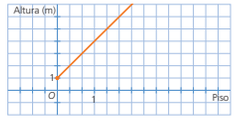
6. APLICACIONES

Aplicaciones de las funciones lineales

Elena, Javier y Lucas son vecinos en el mismo edificio. Se han propuesto medir la altura a la que se encuentran al subir en el ascensor. Cuando llegan al 2.º piso, donde vive Elena, están a 7 m sobre el nivel de la calle.

Javier y Lucas comprueban que el 5.º, donde está la casa de Lucas, se encuentra a 16 m de altura. Si Javier vive en el 3.º, ¿puede determinar la altura de su piso sin necesidad de medir?

Piso	2	5
Altura (m)	7	16



Si consideramos las variables *piso* y *altura*, reconoceremos en la gráfica que se trata de una función lineal cuya expresión es:

$$f(x) = 3x + 1$$

Así, para determinar a qué altura está el piso de Javier, calculamos:

$$f(3) = 3 \cdot 3 + 1 = 10$$

Su piso se encuentra a 10 m sobre el nivel de la calle.

Aplicaciones de las funciones cuadráticas

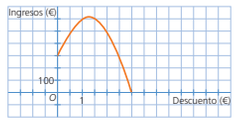
El dueño de una atracción de feria comprobó que, si cobraba 3 € por tique, montaban al día 100 personas.

Se le ocurrió bajar el precio a 2,75 €, y se incrementó en 50 el número de personas que montaban al día.

Lo volvió a reducir a 2,50 € y vendió 200 tiques.

Veamos la relación que existe entre el *descuento* y los *ingresos obtenidos:*

Descuento (€)	Ingresos (€)
0	300
0,25	412,50
0,50	500



Podemos observar que las variables se relacionan mediante una función cuadrática cuya expresión es:

$$f(x) = -200x^2 + 500x + 300$$

Para determinar el descuento con el que se obtiene el mayor ingreso, calculamos el vértice de la parábola:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{500}{-400} = 1{,}25$$

$$f(1{,}25) = -200 \cdot 1{,}25^2 + 500 \cdot 1{,}25 + 300 = 612{,}50$$

Por tanto, si el descuento es de 1,25 €, los ingresos ascenderán a su valor máximo, es decir; 612,50 €.

En tu vida diaria

Si observamos la realidad social, física, … y encontramos relaciones entre los datos obtenidos, podemos estudiar los fenómenos y predecir situaciones decisivas.

Actividades 12

37 En la televisión han anunciado que la temperatura bajará progresivamente 2 °C cada hora entre las 19 h y las 24 h.
Dibuja la gráfica que representa el descenso de la temperatura, sabiendo que a las 19 h la temperatura era de 10 °C.

38 Describe las condiciones de una situación de la vida cotidiana que se corresponda con la función: $f(x) = 4x + 3$

39 Fátima ha dibujado un triángulo equilátero en una aplicación informática que le permite cambiar la longitud del lado.
Halla la expresión algebraica de la función que indica el perímetro del triángulo en función de la medida del lado.

40 Una función está definida por la siguiente relación: *A cada número le corresponde el que resulta de calcular sus tres cuartas partes y sumarle luego tres.*
a) Escribe su expresión algebraica.
b) Representa gráficamente la función.
c) ¿Es una función de proporcionalidad directa?

41 Pedro ha comprobado que, por cada paso que da, avanza 60 cm.
Representa la función que relaciona los *pasos* y los *metros recorridos;* ¿qué tipo de función es?

42 En una tienda hacen un 15 % de descuento en todos los artículos durante las rebajas.
Escribe la ecuación de la función que expresa el descuento según el precio de cada artículo.

43 En una cafetería nos dan los siguientes precios según se elija sentarse en mesa (A) o en barra (B).

Contesta razonadamente.
a) ¿Qué opción es mejor?
b) ¿A partir de qué número de cafés es más rentable cada opción?

44 Al lanzar un proyectil, la altura que alcanza y los kilómetros recorridos están relacionados por la ecuación: $f(x) = -4x^2 + 8x$
Calcula la altura máxima que alcanza y representa gráficamente la trayectoria.

Investiga

45 ¿Por qué la gráfica de una función nos aporta mucha más información que una tabla de valores? Piensa dos ejemplos que justifiquen tu respuesta.

Sugerencias didácticas

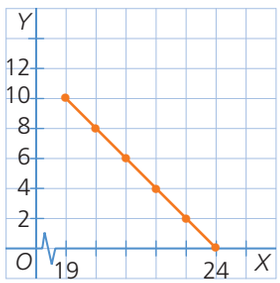
Este apartado ayudará a los alumnos a fijar su atención, a desarrollar la comprensión, a relacionar un problema con alguno parecido y a pensar en la estrategia que les llevará a la solución. Realizando las actividades propuestas nos aseguraremos de que han comprendido conceptos básicos planteados en la unidad.

Debemos insistir en la necesidad de ser rigurosos a la hora de hacer representaciones gráficas, deben estar claras, con una escala adecuada, y deben presentar los datos relevantes.

Soluciones de las actividades

37 En la televisión han anunciado que la temperatura bajará progresivamente 2 °C cada hora entre las 19 h y las 24 h.

Dibuja la gráfica que representa el descenso de la temperatura, sabiendo que a las 19 h la temperatura era de 10 °C.



38 Describe las condiciones de una situación de la vida cotidiana que se corresponda con la función: $f(x) = 4x + 3$

En un alberge cobran 3 euros fijos más 4 euros por cada día que pasemos en él.

Si, por ejemplo, pasamos cinco días debemos pagar: $f(5) = 4 \cdot 5 + 3 = 23$ €

39 Fátima ha dibujado un triángulo equilátero en una aplicación informática que le permite cambiar la longitud del lado. Halla la expresión algebraica de la función que indica el perímetro del triángulo en función de la medida del lado.

$f(x) = 3x$

40 Una función está definida por la siguiente relación: *A cada número le corresponde el que resulta de calcular sus tres cuartas partes y al resultado sumarle luego tres.*

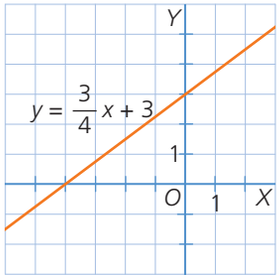
a) Escribe su expresión algebraica.

b) Representa gráficamente la función.

c) ¿Es una función de proporcionalidad directa?

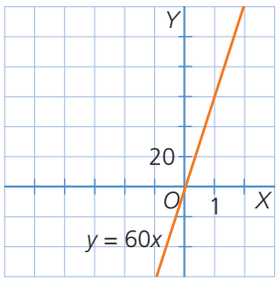
a) $f(x) = \frac{3}{4}x + 3$

b)



c) No es función de proporcionalidad directa.

41 Pedro ha comprobado que, por cada paso que da, avanza 60 cm. Representa la función que relaciona los *pasos* y los *metros recorridos;* ¿qué tipo de función es?



Es una función de proporcionalidad directa.

42 En una tienda hacen un 15 % de descuento en todos los artículos durante las rebajas. Escribe la ecuación de la función que expresa el descuento según el precio de cada artículo.

$f(x) = \frac{15}{100}x$

43 En una cafetería nos dan los siguientes precios según se elija sentarse en mesa (A) o en barra (B). Contesta razonadamente.

a) ¿Qué opción es mejor?

b) ¿A partir de qué número de cafés es más rentable cada opción?

a) Si tomamos uno o dos cafés es mejor la opción B.

Para tres cafés las dos opciones son iguales.

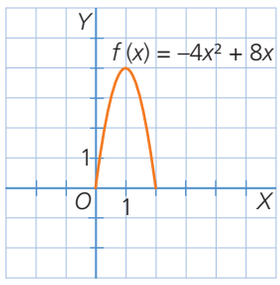
b) A partir de cuatro cafés es más rentable, para nosotros, la opción A.

44 Al lanzar un proyectil, la altura que alcanza y los kilómetros recorridos están relacionados por la ecuación: $f(x) = -4x^2 + 8x$

Calcula la altura máxima que alcanza y representa gráficamente la trayectoria.

La altura máxima la alcanza en el vértice de la parábola.

Vértice: $\left.\begin{array}{l} x = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2\cdot(-4)} = 1 \\ f(1) = -4(1)^2 + 8\cdot 1 = 4 \end{array}\right\} \rightarrow V(1, 4)$ Por tanto la altura máxima es de 4 km.



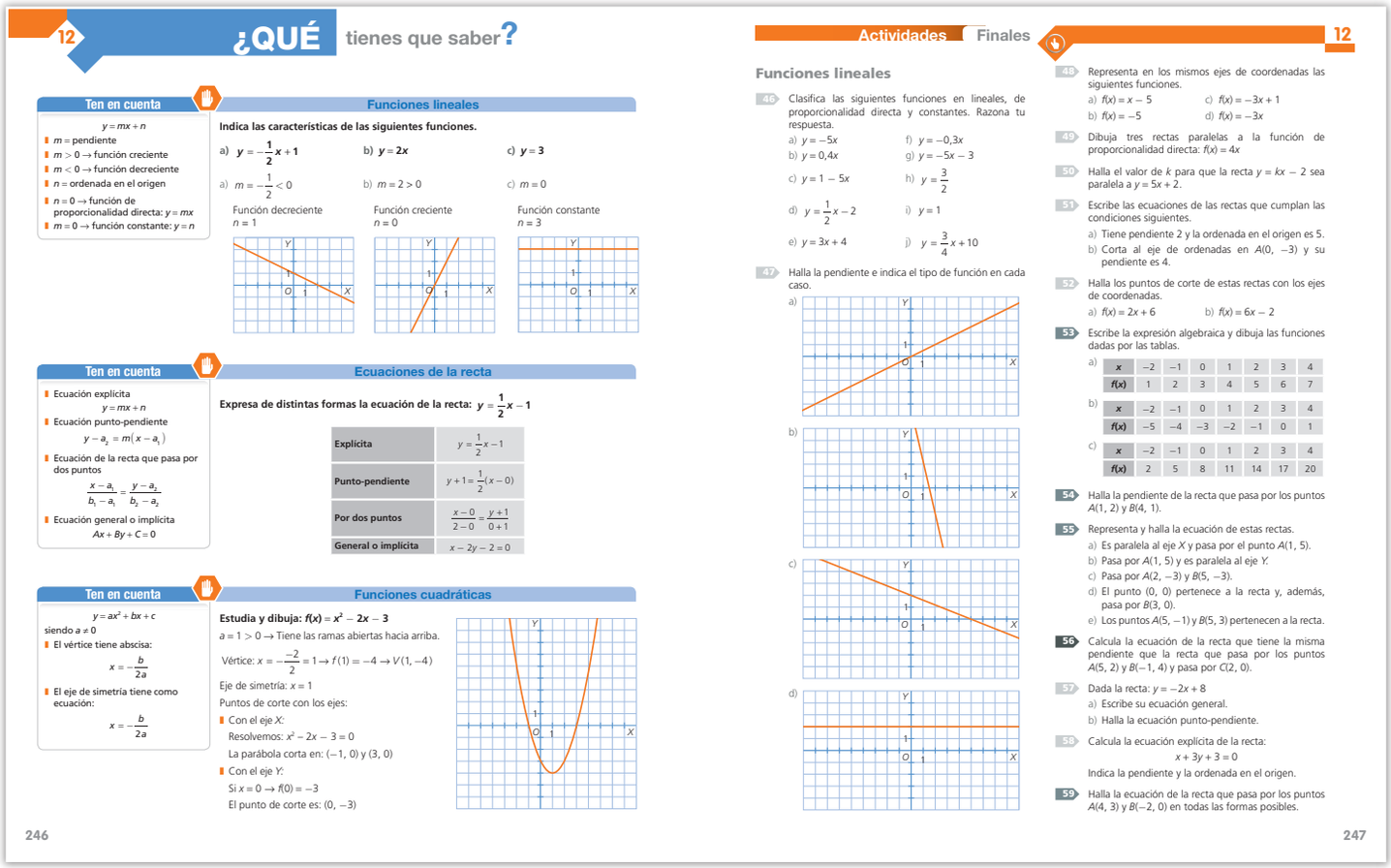
Investiga

45 ¿Por qué la gráfica de una función nos aporta mucha más información que una tabla de valores? Piensa dos ejemplos que justifiquen tu respuesta.

La gráfica de una función nos permite ver todos los valores que toma, en una tabla de valores vemos solo algunos de ellos.

Por ejemplo, en el ejercicio 41 si Pedro escribe una tabla de valores, por muy grande que fuera, nunca nos daría tanta información como la gráfica de la función y en el ejercicio 42, si escribimos una tabla, nos pasaría lo mismo, en ella no estarían contemplados todos los posibles precios de artículos.

¿Qué tienes que saber?



12 ¿QUÉ tienes que saber?

Ten en cuenta — **Funciones lineales**

$y = mx + n$
- m = pendiente
- $m > 0 \rightarrow$ función creciente
- $m < 0 \rightarrow$ función decreciente
- n = ordenada en el origen
- $n = 0 \rightarrow$ función de proporcionalidad directa: $y = mx$
- $m = 0 \rightarrow$ función constante: $y = n$

Indica las características de las siguientes funciones.

a) $y = -\frac{1}{2}x + 1$ b) $y = 2x$ c) $y = 3$

a) $m = -\frac{1}{2} < 0$ b) $m = 2 > 0$ c) $m = 0$

Función decreciente $n = 1$ Función creciente $n = 0$ Función constante $n = 3$

Ten en cuenta — **Ecuaciones de la recta**

- Ecuación explícita $y = mx + n$
- Ecuación punto-pendiente $y - a_2 = m(x - a_1)$
- Ecuación de la recta que pasa por dos puntos $\frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2}$
- Ecuación general o implícita $Ax + By + C = 0$

Expresa de distintas formas la ecuación de la recta: $y = \frac{1}{2}x - 1$

Explícita	$y = \frac{1}{2}x - 1$
Punto-pendiente	$y + 1 = \frac{1}{2}(x - 0)$
Por dos puntos	$\frac{x - 0}{2 - 0} = \frac{y + 1}{0 + 1}$
General o implícita	$x - 2y - 2 = 0$

Ten en cuenta — **Funciones cuadráticas**

$y = ax^2 + bx + c$ siendo $a \neq 0$
- El vértice tiene abscisa: $x = -\frac{b}{2a}$
- El eje de simetría tiene como ecuación: $x = -\frac{b}{2a}$

Estudia y dibuja: $f(x) = x^2 - 2x - 3$

$a = 1 > 0 \rightarrow$ Tiene las ramas abiertas hacia arriba.

Vértice: $x = -\frac{-2}{2} = 1 \rightarrow f(1) = -4 \rightarrow V(1, -4)$

Eje de simetría: $x = 1$

Puntos de corte con los ejes:
- Con el eje X:
  Resolvemos: $x^2 - 2x - 3 = 0$
  La parábola corta en: $(-1, 0)$ y $(3, 0)$
- Con el eje Y:
  Si $x = 0 \rightarrow f(0) = -3$
  El punto de corte es: $(0, -3)$

246

Actividades Finales 12

Funciones lineales

46 Clasifica las siguientes funciones en lineales, de proporcionalidad directa y constantes. Razona tu respuesta.
a) $y = -5x$ b) $y = 0{,}4x$ c) $y = 1 - 5x$ d) $y = \frac{1}{2}x - 2$ e) $y = 3x + 4$ f) $y = -0{,}3x$ g) $y = -5x - 3$ h) $y = \frac{3}{2}$ i) $y = 1$ j) $y = \frac{3}{4}x + 10$

47 Halla la pendiente e indica el tipo de función en cada caso.
a) b) c) d)

48 Representa en los mismos ejes de coordenadas las siguientes funciones.
a) $f(x) = x - 5$ b) $f(x) = -5$ c) $f(x) = -3x + 1$ d) $f(x) = -3x$

49 Dibuja tres rectas paralelas a la función de proporcionalidad directa: $f(x) = 4x$

50 Halla el valor de k para que la recta $y = kx - 2$ sea paralela a $y = 5x + 2$.

51 Escribe las ecuaciones de las rectas que cumplan las condiciones siguientes.
a) Tiene pendiente 2 y la ordenada en el origen es 5.
b) Corta al eje de ordenadas en $A(0, -3)$ y su pendiente es 4.

52 Halla los puntos de corte de estas rectas con los ejes de coordenadas.
a) $f(x) = 2x + 6$ b) $f(x) = 6x - 2$

53 Escribe la expresión algebraica y dibuja las funciones dadas por las tablas.

a)

x	−2	−1	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	7

b)

x	−2	−1	0	1	2	3	4
$f(x)$	−5	−4	−3	−2	−1	0	1

c)

x	−2	−1	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	5	8	11	14	17	20

54 Halla la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(1, 2)$ y $B(4, 1)$.

55 Representa y halla la ecuación de estas rectas.
a) Es paralela al eje X y pasa por el punto $A(1, 5)$.
b) Pasa por $A(1, 5)$ y es paralela al eje Y.
c) Pasa por $A(2, -3)$ y $B(5, -3)$.
d) El punto $(0, 0)$ pertenece a la recta y, además, pasa por $B(3, 0)$.
e) Los puntos $A(5, -1)$ y $B(5, 3)$ pertenecen a la recta.

56 Calcula la ecuación de la recta que tiene la misma pendiente que la recta que pasa por los puntos $A(5, 2)$ y $B(-1, 4)$ y pasa por $C(2, 0)$.

57 Dada la recta: $y = -2x + 8$
a) Escribe su ecuación general.
b) Halla la ecuación punto-pendiente.

58 Calcula la ecuación explícita de la recta:
$$x + 3y + 3 = 0$$
Indica la pendiente y la ordenada en el origen.

59 Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(4, 3)$ y $B(-2, 0)$ en todas las formas posibles.

247

Sugerencias didácticas

En esta sección se destacan los procedimientos más importantes que los alumnos deben haber aprendido tras estudiar esta unidad. En este momento, los alumnos deben ser capaces de:

- Reconocer las características de las funciones de proporcionalidad directa, las funciones constantes y las funciones lineales.
- Relacionar la pendiente de una función lineal con el crecimiento y decrecimiento.
- Expresar la ecuación de una recta en forma explícita, punto-pendiente, recta que pasa por dos puntos y general.
- Hallar la ecuación de una recta conocidos dos puntos por los que pasa o conocido un punto y su pendiente.
- Calcular los elementos característicos de una función cuadrática y representarla gráficamente.

Actividades finales

Soluciones de las actividades

46 Clasifica las siguientes funciones en lineales, de proporcionalidad directa y constantes. Razona tu respuesta.

a) $y = -5x$ **b)** $y = 0{,}4x$ **c)** $y = 1 - 5x$ **d)** $y = \frac{1}{2}x - 2$ **e)** $y = 3x + 4$ **f)** $y = -0{,}3x$ **g)** $y = -5x - 3$ **h)** $y = \frac{3}{2}$ **i)** $y = 1$ **j)** $y = \frac{3}{4}x + 10$

a) Es función de proporcionalidad directa: $m = -0{,}5$

b) Es función de proporcionalidad directa: $m = 0{,}4$

c) Es función lineal: $m = -5$ y $n = 1$

d) Es función lineal: $m = \frac{1}{2}$ y $n = -2$

e) Es función lineal: $m = 3$ y $n = 4$

f) Es función de proporcionalidad directa: $m = -0{,}3$

g) Es función lineal: $m = -5$ y $n = -3$

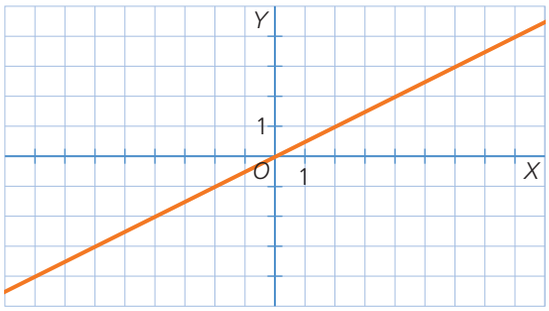
h) Es función constante.

i) Es función constante.

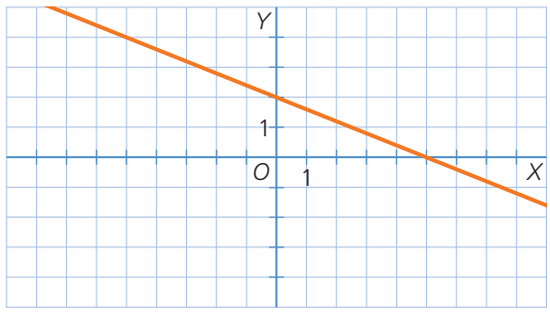
j) Es función lineal: $m = \frac{3}{4}$ y $n = 10$

47 Halla la pendiente e indica el tipo de función en cada caso.

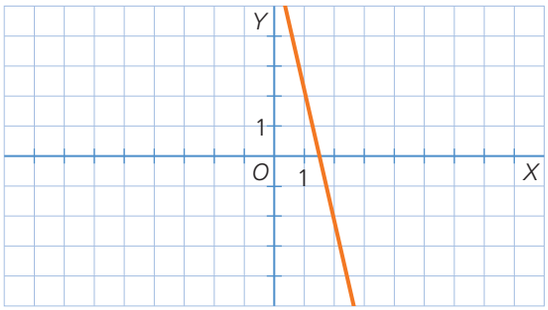
a)



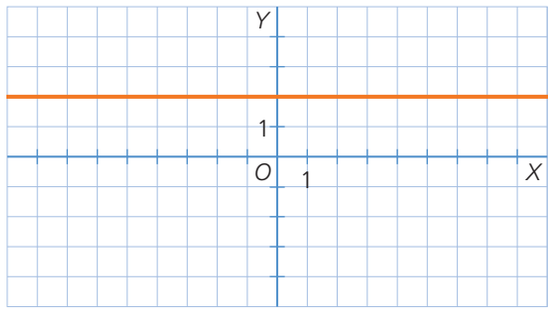
c)



b)



d)



a) $m = \frac{1}{2}$, función de proporcionalidad directa

b) $m = -\frac{8}{2} = -4$, función lineal

c) $m = -\frac{2}{5}$, función lineal

d) $m = 0$, función constante

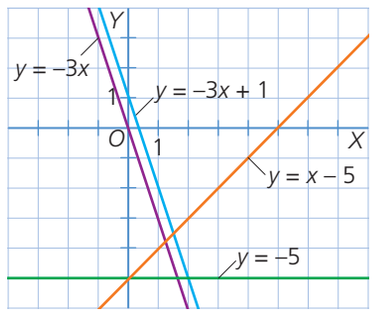
48 Representa en los mismos ejes de coordenadas las siguientes funciones.

a) $f(x) = x - 5$

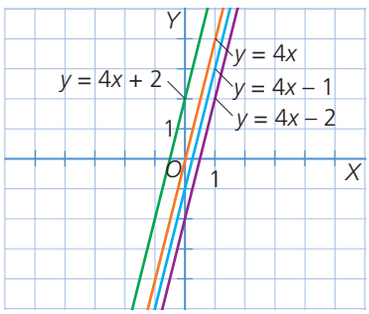
b) $f(x) = -5$

c) $f(x) = -3x + 1$

d) $f(x) = -3x$



49 Dibuja tres rectas paralelas a la función de proporcionalidad directa: $f(x) = 4x$



50 Halla el valor de k para que la recta $y = kx - 2$ sea paralela a $y = 5x + 2$.

$k = 5$

51 Escribe las ecuaciones de las rectas que cumplan las condiciones siguientes.

a) Tiene pendiente 2 y la ordenada en el origen es 5.

b) Corta al eje de ordenadas en $A(0, -3)$ y su pendiente es 4.

a) $f(x) = 2x + 5$

b) $f(x) = 4x - 3$

52 Halla los puntos de corte de estas rectas con los ejes de coordenadas.

a) $f(x) = 2x + 6$

a) Con el eje X: $y = 0 \rightarrow (-3, 0)$

Con el eje Y: $x = 0 \rightarrow (0, 6)$

b) $f(x) = 6x - 2$

b) Con el eje X: $y = 0 \rightarrow \left(\frac{1}{3}, 0\right)$

Con el eje Y: $x = 0 \rightarrow (0, -2)$

53 Escribe la expresión algebraica y dibuja las funciones dadas por las tablas.

a)

x	−2	−1	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	7

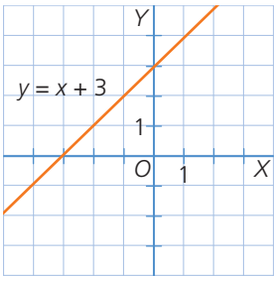
b)

x	−2	−1	0	1	2	3	4
$f(x)$	−5	−4	−3	−2	−1	0	1

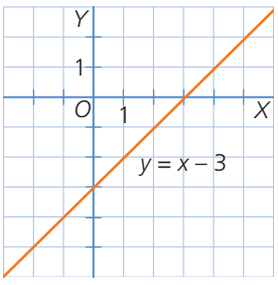
c)

x	−2	−1	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	5	8	11	14	17	20

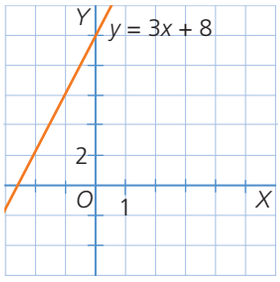
a) $\frac{x+2}{0+2} = \frac{y-1}{3-1} \rightarrow \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{2} \rightarrow y = x + 3$



b) $\frac{x+2}{0+2} = \frac{y+5}{-3+5} \rightarrow \frac{x+2}{2} = \frac{y+5}{2} \rightarrow y = x - 3$



c) $\frac{x+2}{0+2} = \frac{y-2}{8-2} \rightarrow \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{6} \rightarrow y = 3x + 8$



54 Halla la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(1, 2)$ y $B(4, 1)$.

$$m = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} = \frac{1-2}{4-1} = -\frac{1}{3}$$

55 Representa y halla la ecuación de cada una de las rectas.

a) Es paralela al eje X y pasa por el punto $A(1, 5)$.

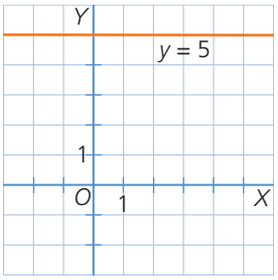
b) Pasa por $A(1, 5)$ y es paralela al eje Y.

c) Pasa por $A(2, -3)$ y $B(5, -3)$.

d) El punto $(0, 0)$ pertenece a la recta y, además, pasa por $B(3, 0)$.

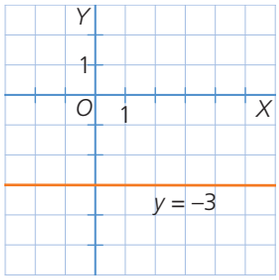
e) Los puntos $A(5, -1)$ y $B(5, 3)$ pertenecen a la recta.

a)



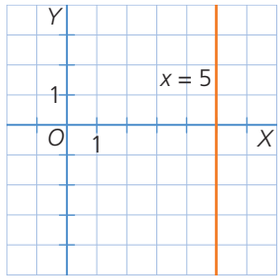
$f(x) = 5$

c)



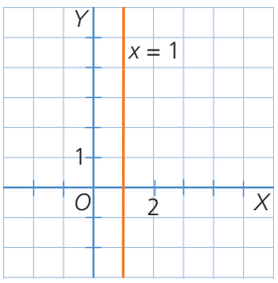
$f(x) = -3$

e)



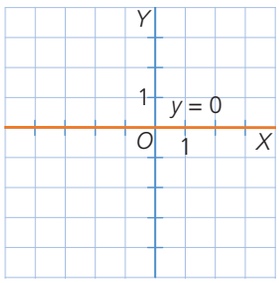
$x = 5$

b)



$x = 1$

d)



$f(x) = 0$

56 Calcula la ecuación de la recta que tiene la misma pendiente que la recta que pasa por los puntos $A(5, 2)$ y $B(-1, 4)$ y pasa por $C(2, 0)$.

$$y - 0 = \frac{4-2}{-1-5} \cdot (x-2) \rightarrow y = \frac{2}{-6} \cdot (x-2) \rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

57 Dada la recta: $y = -2x + 8$

a) Escribe su ecuación general.

b) Halla la ecuación punto-pendiente.

a) $2x + y - 8 = 0$

b) Pasa por el punto $(0, 8) \rightarrow y - 8 = -2(x - 0)$

58 Calcula la ecuación explícita de la recta: $x + 3y + 3 = 0$

Indica la pendiente y la ordenada en el origen.

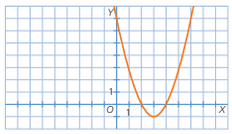
La ecuación explícita es $y = -\frac{1}{3}x - 1$, la pendiente, $m = -\frac{1}{3}$ y la ordenada en el origen, $n = -1$

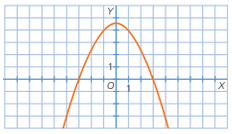
59 Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(4, 3)$ y $B(-2, 0)$ en todas las formas posibles.

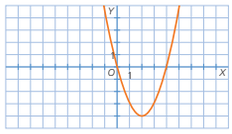
- Ecuación de la recta que pasa por dos puntos: $\frac{x-4}{-2-4} = \frac{y-3}{0-3}$
- Ecuación punto-pendiente: $y - 3 = \frac{-3}{-6}(x-4) \rightarrow y - 3 = \frac{1}{2}(x-4)$
- Ecuación general o implícita: $y - 3 = \frac{1}{2}(x-4) \rightarrow 2y - 6 = x - 4 \rightarrow x - 2y + 2 = 0$
- Ecuación explícita: $y - 3 = \frac{1}{2}(x-4) \rightarrow y = \frac{1}{2}(x-4) + 3 \rightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$

Funciones cuadráticas

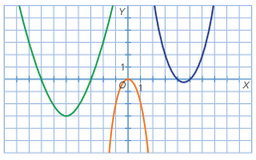
60 Indica el vértice, el eje de simetría y los puntos de corte con los ejes de estas parábolas.

a)


b)


c)


61 Relaciona cada parábola con su ecuación.



a) $f(x) = x^2 + 10x + 21$
b) $f(x) = x^2 - 9x + 20$
c) $f(x) = -2x^2$

62 Determina el vértice y el eje de simetría de las parábolas.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 2$
b) $f(x) = -5x^2$
c) $f(x) = 4x^2 + 5$
d) $f(x) = -x^2 + 7x$

63 Representa las funciones utilizando los mismos ejes de coordenadas.

a) $f(x) = 3x^2$
b) $f(x) = -3x^2$
c) $f(x) = 3x^2 + 1$
d) $f(x) = -3x^2 + 1$

64 Halla el vértice, los puntos de corte con los ejes y el eje de simetría de las siguientes funciones. Dibuja sus gráficas.

a) $f(x) = x^2 - 4x$
b) $f(x) = -x^2 + 4x$

65 Indica qué condición debe cumplir la expresión algebraica de una función cuadrática para que una de las ramas de la parábola pase por el punto (0, 0).

66 Si el eje de simetría de una parábola es $y = 4$, ¿se corresponde con una función cuadrática? Razona tu respuesta.

67 Determina la ecuación de tres parábolas cuyos puntos de corte con el eje X sean:

$A(1, 0)$ y $B(3, 0)$

68 Indica los elementos característicos de estas funciones y represéntalas gráficamente.

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$
b) $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$

69 Indica qué condiciones deben verificar los coeficientes de una parábola para que:

a) No corte al eje de abscisas.
b) Corte al eje de abscisas en un solo punto.

70 Representa una función cuadrática que cumpla las condiciones:

- Es creciente en el intervalo $(2, +\infty)$.
- Corta a los ejes de coordenadas en los puntos $A(0, 0)$ y $B(4, 0)$.

71 Dibuja una parábola que cumpla estas condiciones:

- Corta a los ejes en los puntos $A(-3, 0)$, $B(1, 0)$ y $C(0, -3)$.
- Decrece en el intervalo $(-\infty, -1)$.

72 Representa las siguientes funciones cuadráticas y determina el vértice, los puntos de corte con los ejes y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a) $f(x) = x(x - 3)$
b) $f(x) = (x + 1)(x - 4)$
c) $f(x) = 2(x + 1)(x - 4)$
d) $f(x) = x^2 + x + 1$
e) $f(x) = x^2 - 2x + 5$
f) $f(x) = -x^2 + 2x - 2$

Aplicaciones

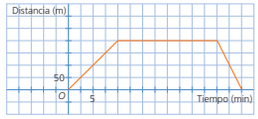
73 En una estación de servicio han fijado el precio del litro de gasolina en 1,40 €.

a) Elabora una tabla de precios con los importes correspondientes a 5 L, 10 L, 20 L y 30 L.
b) Representa la función que relaciona los *litros de gasolina* y su *precio*.
c) Indica qué tipo de función es y escribe su expresión algebraica.
d) ¿Cuántos litros de gasolina ha repostado una señora que paga 49 €?

74 Una moto se desplaza a una velocidad constante de 80 km/h.

a) Escribe la ecuación de la función que relaciona el *espacio recorrido* y el *tiempo empleado*.
b) ¿De qué tipo de función se trata?
c) Representa su gráfica.
d) Calcula el tiempo que tarda la moto en recorrer 200 km.

75 La gráfica describe el paseo de Álvaro desde su casa a la heladería. Allí se encontró con su amiga Claudia y estuvieron un rato charlando.



a) ¿Qué distancia separa la casa de Álvaro de la heladería?
b) ¿Cuánto tiempo tardó en llegar?
c) ¿Cuántos minutos estuvo con Claudia?
d) Indica el intervalo en el que la función es constante.
e) Halla la ecuación de la recta que representa el trayecto de ida.
f) Determina la ecuación de la recta que representa el trayecto de vuelta.

76 Halla la expresión algebraica de la función de proporcionalidad directa que asocia cada precio de los artículos de una tienda con lo que hay que pagar por ellos si se les ha aplicado un 21 % de IVA.

77 Quique quiere comprar unos libros por Internet. El precio de cada ejemplar es de 8 €, y por los gastos de envío debe abonar 3 € independientemente de los libros que encargue.

a) Realiza una tabla con el importe de diferentes compras.
b) Representa los resultados con una gráfica.
c) Deduce cuál será la expresión de la función que indica el importe según el número de libros que se seleccione.

78 En Estados Unidos utilizan la escala Fahrenheit para medir la temperatura. La expresión que calcula los grados Celsius en función de los grados Fahrenheit (°F) es:

$$°C = \frac{5}{9}°F - \frac{160}{9}$$

Observa que se trata de una función lineal.

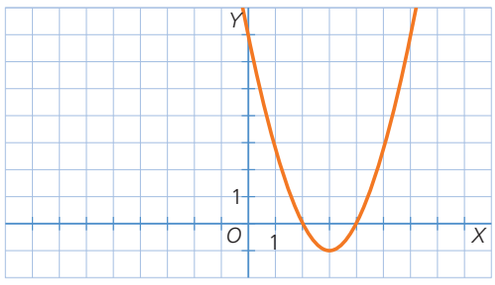
a) Construye una tabla de valores que incluya, entre otras, la temperatura del punto de fusión (0 °C) y la de ebullición (100 °C).
b) Halla el valor de la temperatura que coincide en ambas escalas e investiga en qué lugar de la Tierra se alcanza ese valor.

79 Se lanza una pelota de golf en un campo de juego. Si x es la distancia horizontal, en metros, que recorre la bola, e y, la altura que alcanza, también en metros, su trayectoria viene dada por la función:

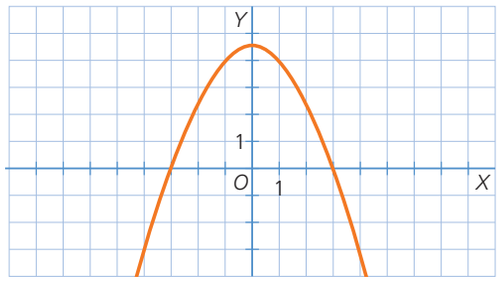
$$y = -0{,}005x^2 + x$$

a) Calcula la altura máxima que alcanza la pelota.
b) Halla la distancia horizontal que ha recorrido la pelota desde el punto de lanzamiento hasta el de llegada al suelo.

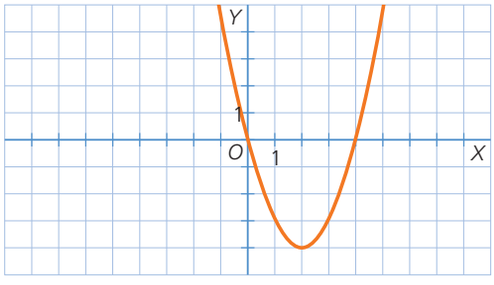
60 Indica el vértice, el eje de simetría y los puntos de corte con los ejes de estas parábolas.

a)


a) Vértice: $V(3, -1)$
Eje de simetría: $x = 3$
Puntos de corte con los ejes: (2, 0), (4, 0) y (0, 7).

b)


b) Vértice: $V(0; 4{,}5)$
Eje de simetría: $x = 0$
Puntos de corte con los ejes: $(-3, 0)$, (3, 0) y (0; 4,5).

c)


c) Vértice: $V(2, -4)$
Eje de simetría: $x = 2$
Puntos de corte con los ejes: (0, 0) y (4, 0)

61 Relaciona cada parábola con su ecuación.

a) $f(x) = x^2 + 10x + 21$

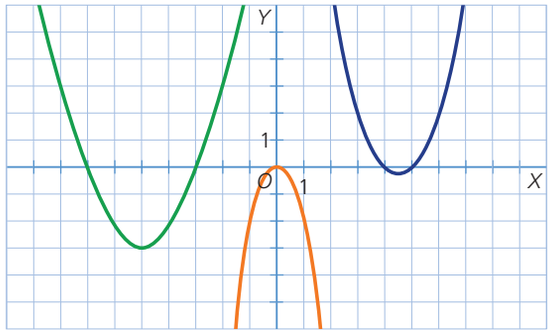
b) $f(x) = x^2 - 9x + 20$

c) $f(x) = -2x^2$

a) Color verde.

b) Color azul.

c) Color naranja.



62 Determina el vértice y el eje de simetría de las parábolas.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 2$ **b)** $f(x) = -5x^2$ **c)** $f(x) = 4x^2 + 5$ **d)** $f(x) = -x^2 + 7x$

a) Vértice: $\left.\begin{array}{l} x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{2\cdot(1)} = 2 \\ f(2) = (2)^2 - 4\cdot(2) + 2 = -2 \end{array}\right\} \rightarrow V(2, -2)$

Eje de simetría: $x = 2$

b) Vértice: $V(0, 0)$

Eje de simetría: $x = 0$

c) Vértice: $V(0, 5)$

Eje de simetría: $x = 0$

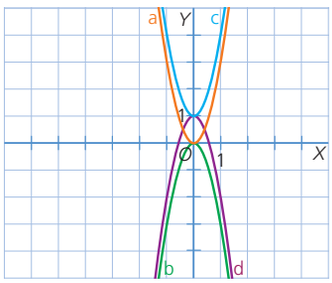
d) Vértice: $\left.\begin{array}{l} x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{7}{2\cdot(-1)} = \dfrac{7}{2} \\ f\left(\dfrac{7}{2}\right) = -\left(\dfrac{7}{2}\right)^2 + 7\cdot\left(\dfrac{7}{2}\right) = \dfrac{49}{4} \end{array}\right\} \rightarrow V\left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{49}{4}\right)$

Eje de simetría: $x = \dfrac{7}{2}$

63 Representa las funciones utilizando los mismos ejes de coordenadas.

a) $f(x) = 3x^2$ **c)** $f(x) = 3x^2 + 1$

b) $f(x) = -3x^2$ **d)** $f(x) = -3x^2 + 1$



64 Halla el vértice, los puntos de corte con los ejes y el eje de simetría de estas funciones. Dibuja sus gráficas.

a) $f(x) = x^2 - 4x$ **b)** $f(x) = -x^2 + 4x$

a) Vértice: $\left.\begin{array}{l} x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{2\cdot(1)} = 2 \\ f(2) = (2)^2 - 4\cdot(2) = -4 \end{array}\right\} \rightarrow V(2, -4)$

Eje de simetría: $x = 2$

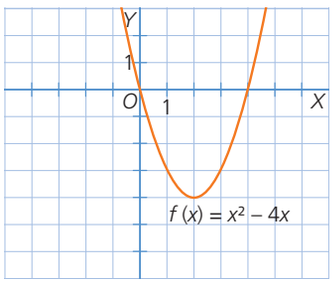
- Cortes con el eje X:

$x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(x - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

La parábola corta al eje X en (0, 0) y en (4, 0).

- Corte con el eje Y: Si $x = 0 \rightarrow f(0) = 0$

La parábola corta en (0, 0).



b) Vértice: $\left.\begin{array}{l} x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{4}{2\cdot(-1)} = 2 \\ f(2) = -(2)^2 + 4\cdot(2) = 4 \end{array}\right\} \rightarrow V(2, 4)$

Eje de simetría: $x = 2$

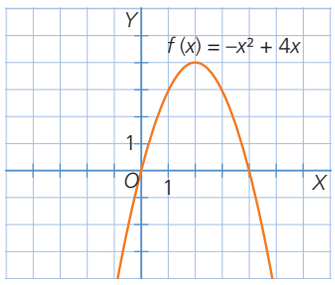
- Con el eje X:

$-x^2 + 4x = 0 \rightarrow x(-x + 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

La parábola corta al eje X en (0, 0) y en (4, 0).

- Corte con el eje Y: Si $x = 0 \rightarrow f(0) = 0$

La parábola corta en (0, 0).



65 Indica qué condición debe cumplir la expresión algebraica de una función cuadrática para que una de las ramas de la parábola pase por el punto (0, 0).

Para que una de las ramas de la función $y = ax^2 + bx + c$ pase por (0, 0) es necesario que $a \neq 0$ y $c = 0$.

66 Si el eje de simetría de una parábola es $y = 4$, ¿se corresponde con una función cuadrática? Razona tu respuesta.

No se corresponde con una función cuadrática, la recta $y = 4$ es paralela al eje X.

67 Determina la ecuación de tres parábolas cuyos puntos de corte con el eje X sean $A(1, 0)$ y $B(3, 0)$.

$y_1 = (x - 1)\cdot(x - 3) = x^2 - 4x + 3$ $\quad$ $y_2 = 2(x - 1)\cdot(x - 3) = 2x^2 - 8x + 6$ $\quad$ $y_3 = 3(x - 1)\cdot(x - 3) = 3x^2 - 12x + 9$

68 Indica los elementos característicos de estas funciones y represéntalas gráficamente.

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ $\quad$ **b)** $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$

a) $a = 1 > 0 \rightarrow$ Ramas abiertas hacia arriba.

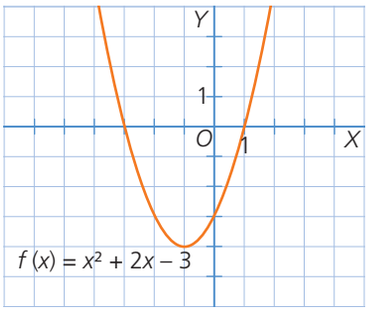
Vértice: $\left.\begin{array}{l} x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{2} = -1 \\ f(-1) = (-1)^2 + 2\cdot(-1) - 3 = -4 \end{array}\right\} \rightarrow V(-1, -4)$

Eje de simetría: $x = -1$

Puntos de corte con los ejes:

- Con el eje X: $x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \dfrac{-2 \pm 4}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

  La parábola corta en los puntos (1, 0) y (−3, 0).
- Con el eje Y: Si $x = 0 \rightarrow f(0) = -3 \rightarrow$ La parábola corta en (0, −3).



b) $a = 2 > 0 \rightarrow$ ramas abiertas hacia arriba.

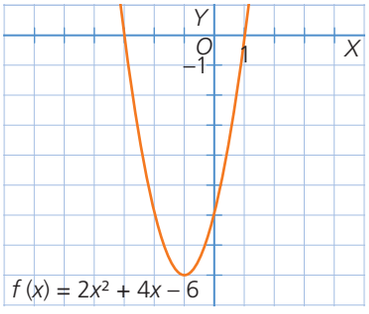
Vértice: $\left.\begin{array}{l} x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{4}{4} = -1 \\ f(-1) = 2(-1)^2 + 4\cdot(-1) - 6 = -8 \end{array}\right\} \rightarrow V(-1, -8)$

Eje de simetría: $x = -1$

Puntos de corte con los ejes:

- Con el eje X: $2x^2 + 4x - 6 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{64}}{4} = \dfrac{-4 \pm 8}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

  La parábola corta en los puntos (1, 0) y (−3, 0).
- Con el eje Y: Si $x = 0 \rightarrow f(0) = -6 \rightarrow$ La parábola corta en (0, −6).



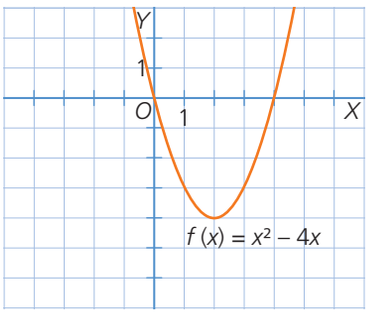
69 Indica qué condiciones deben verificar los coeficientes de una parábola para que:

a) No corte al eje de abscisas. $\quad$ **b)** Corte al eje de abscisas en un solo punto.

a) $b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0$ $\quad$ **b)** $b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0$

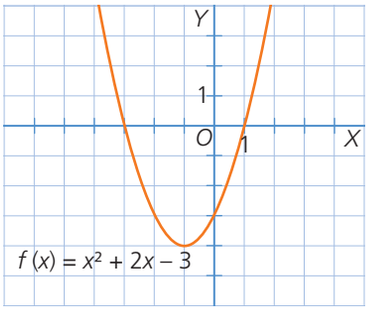
70 Representa una función cuadrática que cumpla las condiciones:

- Es creciente en el intervalo $(2, +\infty)$.
- Corta a los ejes de coordenadas en los puntos $A(0, 0)$ y $B(4, 0)$.



71 Dibuja una parábola que se ajuste a estas condiciones:

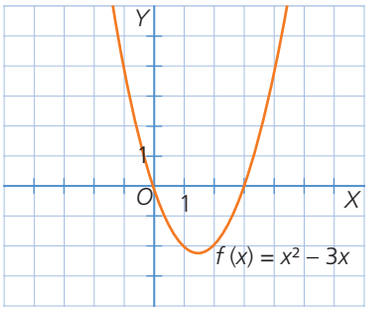
- Corta a los ejes en los puntos $A(-3, 0)$, $B(1, 0)$ y $C(0, -3)$.
- Decrece en el intervalo $(-\infty, -1)$.



72 Representa las siguientes funciones cuadráticas e indica el vértice, los puntos de corte con los ejes y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a) $f(x) = x(x - 3)$
b) $f(x) = (x + 1)(x - 4)$
c) $f(x) = 2(x + 1)(x - 4)$
d) $f(x) = x^2 + x + 1$
e) $f(x) = x^2 - 2x + 5$
f) $f(x) = -x^2 + 2x - 2$

a) $f(x) = x(x - 3) = x^2 - 3x$



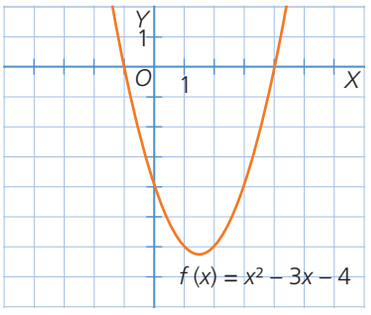
Vértice: $\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2} \\ f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{9}{4} \end{array}\right\} \rightarrow V\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{9}{4}\right)$

Cortes con el eje X: $x(x - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases} \rightarrow (0, 0)$ y $(3, 0)$

Corte con el eje Y: Si $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

Creciente en el intervalo $\left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$ y decreciente en el intervalo $\left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right)$.

b) $f(x) = (x + 1)(x - 4) = x^2 - 3x - 4$



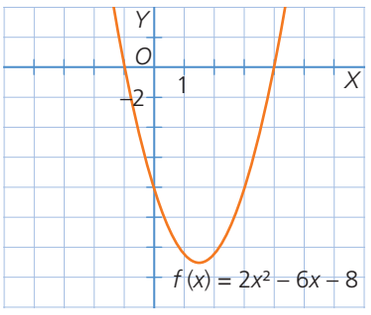
Vértice: $\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2} \\ f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right) - 4 = -\dfrac{25}{4} \end{array}\right\} \rightarrow V\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{25}{4}\right)$

Corte con el eje X: $(x + 1)(x - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 4 \end{cases} \rightarrow (-1, 0)$ y $(4, 0)$

Corte con el eje Y: Si $x = 0 \rightarrow f(0) = -4 \rightarrow (0, -4)$

Creciente en el intervalo $\left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$ y decreciente en el intervalo $\left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right)$.

c) $f(x) = 2(x + 1)(x - 4) = 2x^2 - 6x - 8$



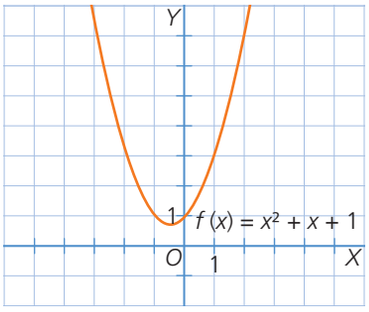
Vértice: $\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2} \\ f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 2 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - 6 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right) - 8 = -\dfrac{25}{2} \end{array}\right\} \rightarrow V\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{25}{2}\right)$

Cortes con el eje X: $2(x + 1)(x - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 4 \end{cases} \rightarrow (-1, 0)$ y $(4, 0)$

Corte con el eje Y: Si $x = 0 \rightarrow f(0) = -8 \rightarrow (0, -8)$

Creciente en el intervalo $\left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$ y decreciente en el intervalo $\left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right)$.

d) Vértice: $\left.\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2} \\ f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right) + 1 = \dfrac{3}{4} \end{array}\right\} \rightarrow V\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$

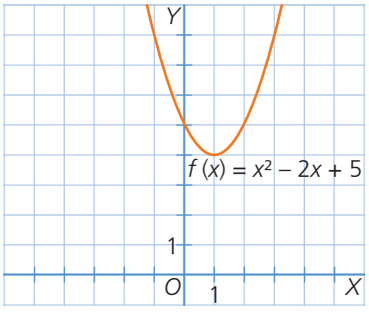


No corta al eje X por ser la ordenada del vértice > 0 y estar sus ramas abiertas hacia arriba.

Corte con el eje Y: Si $x = 0 \rightarrow f(0) = 1 \rightarrow (0, 1)$

Creciente en el intervalo $\left(-\dfrac{1}{2},\ +\infty\right)$ y decreciente en el intervalo $\left(-\infty,\ -\dfrac{1}{2}\right)$.

e) Vértice: $\left.\begin{array}{l} x = -\dfrac{(-2)}{2} = 1 \\ f(1) = (1)^2 - 2 \cdot (1) + 5 = 4 \end{array}\right\} \rightarrow V(1,\ 4)$

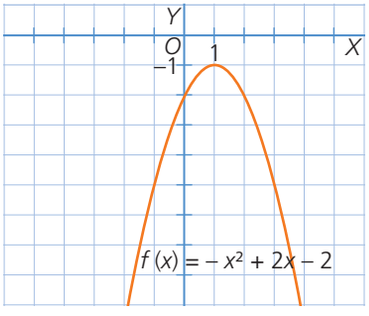


No corta al eje X por ser la ordenada del vértice > 0 y estar sus ramas abiertas hacia arriba.

Corte con el eje Y: Si $x = 0 \rightarrow f(0) = 5 \rightarrow (0, 5)$

Creciente en el intervalo $(1, +\infty)$ y decreciente en el intervalo $(-\infty, 1)$.

f) Vértice: $\left.\begin{array}{l} x = -\dfrac{2}{2(-1)} = 1 \\ f(1) = -(1)^2 + 2 \cdot (1) - 2 = -1 \end{array}\right\} \rightarrow V(1,\ -1)$



Puntos de corte con los ejes:

No corta al eje X por ser la ordenada del vértice < 0 y estar sus ramas abiertas hacia abajo.

Corte con el eje Y: Si $x = 0 \rightarrow f(0) = -2 \rightarrow (0, -2)$

Creciente en el intervalo $(-\infty, 1)$ y decreciente en el intervalo $(1, +\infty)$.

73 En una estación de servicio han fijado el precio del litro de gasolina en 1,40 €.

a) Elabora una tabla de precios con los importes correspondientes a 5 L, 10 L, 20 L y 30 L.

b) Representa la función que relaciona los *litros de gasolina* y su *precio.*

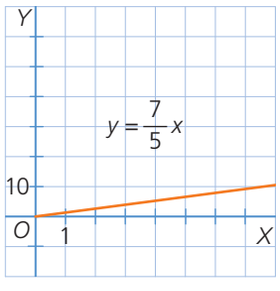
c) Indica qué tipo de función es y escribe su expresión algebraica.

d) ¿Cuántos litros de gasolina ha repostado una señora que paga 49 €?

a)

Litros	5	10	20	30
Precio (€)	7	14	28	42

b)



c) Es una función de proporcionalidad directa, su expresión algebraica es: $f(x) = \dfrac{7}{5}x$

d) $49 = \dfrac{7}{5}x \rightarrow x = 35$ L

74 Una moto se desplaza a una velocidad constante de 80 km/h.

a) Escribe la ecuación de la función que relaciona el *espacio recorrido* y el *tiempo empleado.*

b) ¿De qué tipo de función se trata?

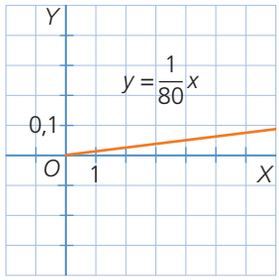
c) Representa su gráfica.

d) Calcula el tiempo que tarda la moto en recorrer 200 km.

a) $f(x) = \frac{1}{80}x$

b) Es función de proporcionalidad directa.

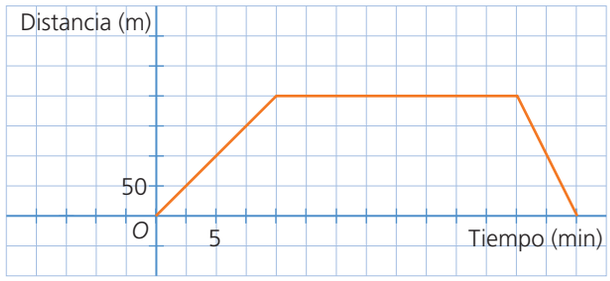
c)



d) $f(200) = \frac{1}{80}200 = 2,5$

Tarda 2 h 30 min

75 La gráfica describe el paseo de Álvaro desde su casa a la heladería. Allí se encontró con su amiga Claudia y estuvieron un rato charlando.



a) ¿Qué distancia separa la casa de Álvaro de la heladería?

b) ¿Cuánto tiempo tardó en llegar?

c) ¿Cuántos minutos estuvo con Claudia?

d) Indica el intervalo en el que la función es constante.

e) Halla la ecuación de la recta que representa el trayecto de ida.

f) Determina la ecuación de la recta que representa el trayecto de vuelta.

a) 200 m **b)** 10 min **c)** 20 min **d)** (10, 30) **e)** $f(x) = 20x$

f) La recta pasa por (30, 200) y (35, 0), su ecuación es: $\frac{x-30}{35-30} = \frac{y-200}{0-200} \rightarrow \frac{x-30}{5} = \frac{y-200}{-200} \rightarrow y = -40x + 1\,400$

76 Halla la expresión algebraica de la función de proporcionalidad directa que asocia cada precio de los artículos de una tienda con lo que hay que pagar por ellos si se les ha aplicado un 21% de IVA.

$f(x) = x + \frac{21}{100}x \rightarrow f(x) = \frac{121}{100}x$

77 Quique quiere comprar unos libros por Internet. El precio de cada ejemplar es de 8 €, y por los gastos de envío debe abonar 3 € independientemente de los libros que encargue.

a) Realiza una tabla con el importe de diferentes compras.

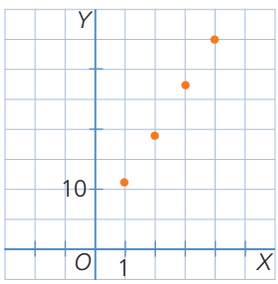
b) Representa los resultados con una gráfica.

c) Deduce cuál será la expresión de la función que indica el importe según el número de libros que se seleccione.

a)

Libros	1	2	3	4
Precio (€)	11	19	27	35

b)



c) $f(x) = 8x + 3$

78 En Estados Unidos utilizan la escala Fahrenheit para medir la temperatura. La expresión que calcula los grados Celsius en función de los grados Fahrenheit (º F) es: $°C = \frac{5}{9}°F - \frac{160}{9}$

Observa que se trata de una función lineal.

a) Construye una tabla de valores que incluya, entre otras, la temperatura del punto de fusión (0 ºC) y la de ebullición (100 ºC).

b) Halla el valor de la temperatura que coincide en ambas escalas e investiga en qué lugar de la Tierra se alcanza ese valor.

a)

Fahrenheit	32	50	68	212
Celsius	0	10	20	100

b) Si $°C = °F = x \rightarrow x = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9} \rightarrow x - \frac{5}{9}x = -\frac{160}{9} \rightarrow 4x = -160 \rightarrow x = -40$

Por tanto, −40 °C = −40 °F. Esta temperatura se alcanza en diversos lugares como en la Antártida, Alaska o Siberia.

79 Se lanza una pelota de golf en un campo de juego. Si x es la distancia horizontal, en metros, que recorre la bola, e y, la altura que alcanza, también en metros, su trayectoria viene dada por la ecuación: $y = -0{,}005x^2 + x$

a) Calcula razonadamente la altura máxima que alcanza la pelota.

b) Halla la distancia horizontal que ha recorrido la pelota desde el punto de lanzamiento hasta el de llegada al suelo.

a) La altura máxima coincide con el valor de la ordenada del vértice.

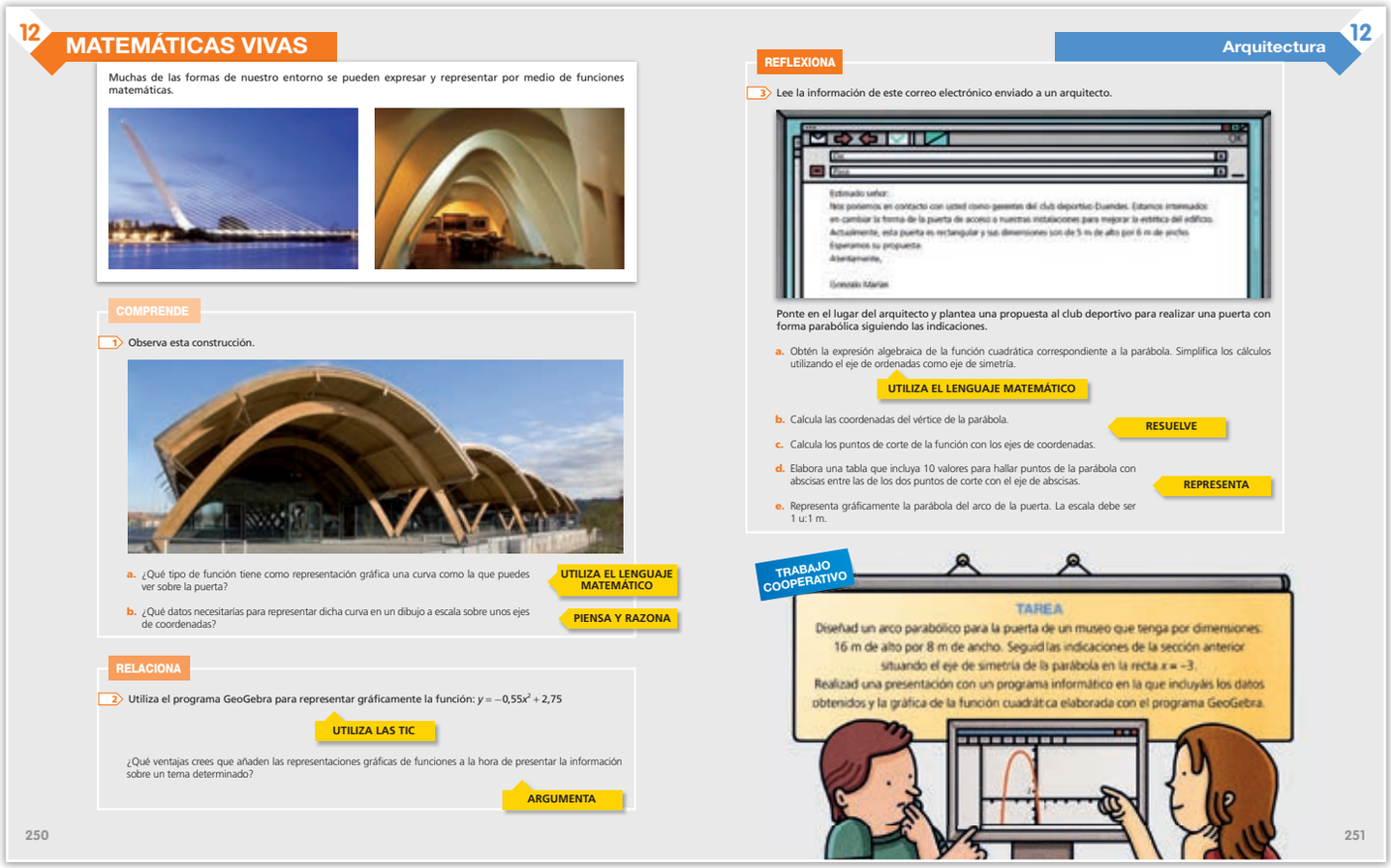
$$\left.\begin{array}{l} x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2(-0{,}005)} = \frac{1}{0{,}01} = 100 \\ f(100) = -0{,}005(100)^2 + 100 = 50 \end{array}\right\} \rightarrow V(100,\ 50) \rightarrow \text{La altura que alcanza es de 50 m.}$$

b) La distancia horizontal es la distancia entre los puntos de corte de la parábola con el eje de abscisas.

Puntos de corte con eje X: $-0{,}005x^2 + x = 0 \rightarrow x(-0{,}005x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{1}{0{,}005} = 200 \end{cases}$

La distancia horizontal que ha recorrido la pelota es de 200 m.

Matemáticas vivas



12 MATEMÁTICAS VIVAS

Muchas de las formas de nuestro entorno se pueden expresar y representar por medio de funciones matemáticas.

COMPRENDE

1 Observa esta construcción.

a. ¿Qué tipo de función tiene como representación gráfica una curva como la que puedes ver sobre la puerta? UTILIZA EL LENGUAJE MATEMÁTICO

b. ¿Qué datos necesitarías para representar dicha curva en un dibujo a escala sobre unos ejes de coordenadas? PIENSA Y RAZONA

RELACIONA

2 Utiliza el programa GeoGebra para representar gráficamente la función: $y = -0{,}55x^2 + 2{,}75$

UTILIZA LAS TIC

¿Qué ventajas crees que añaden las representaciones gráficas de funciones a la hora de presentar la información sobre un tema determinado?

ARGUMENTA

250

Arquitectura 12

REFLEXIONA

3 Lee la información de este correo electrónico enviado a un arquitecto.

Ponte en el lugar del arquitecto y plantea una propuesta al club deportivo para realizar una puerta con forma parabólica siguiendo las indicaciones.

a. Obtén la expresión algebraica de la función cuadrática correspondiente a la parábola. Simplifica los cálculos utilizando el eje de ordenadas como eje de simetría. UTILIZA EL LENGUAJE MATEMÁTICO

b. Calcula las coordenadas del vértice de la parábola. RESUELVE

c. Calcula los puntos de corte de la función con los ejes de coordenadas.

d. Elabora una tabla que incluya 10 valores para hallar puntos de la parábola con abscisas entre las de los dos puntos de corte con el eje de abscisas. REPRESENTA

e. Representa gráficamente la parábola del arco de la puerta. La escala debe ser 1 u:1 m.

TRABAJO COOPERATIVO

TAREA

Diseñad un arco parabólico para la puerta de un museo que tenga por dimensiones: 16 m de alto por 8 m de ancho. Seguid las indicaciones de la sección anterior situando el eje de simetría de la parábola en la recta $x = -3$.

Realizad una presentación con un programa informático en la que incluyáis los datos obtenidos y la gráfica de la función cuadrática elaborada con el programa GeoGebra.

251

Arquitectura

Sugerencias didácticas

En esta sección se les presenta a los alumnos unas construcciones arquitectónicas, situación pública, que les permitirán reconocer las matemáticas en su entorno.

En las actividades de comprensión analizarán la fotografía de una fachada, les resultará relativamente familiar ya que exige básicamente la reiteración de los conocimientos adquiridos y practicados en la unidad. En las actividades de relación los alumnos utilizarán el programa GeoGebra, de esta manera establecerán conexiones para enlazar distintas formas de hacer matemáticas en su proceso de aprendizaje.

Para terminar, en las actividades de reflexión se plantea que el alumno desarrolle un proyecto arquitectónico completo que consiste en diseñar una puerta parabólica. Este nivel de complejidad requiere identificar conceptos para así, con la utilización del lenguaje matemático adecuado, llegar a la resolución y la representación del arco de la puerta.

En la resolución de diferentes actividades de comprensión, relación y reflexión, los alumnos desarrollarán algunas de las competencias matemáticas evaluadas por el estudio PISA: Utiliza el lenguaje matemático, Piensa y razona, Utiliza las TIC, Argumenta, Resuelve o Representa.

Para finalizar la sección, se incluye el apartado **Trabajo cooperativo** donde se propone una tarea cuya estrategia cooperativa es *Por este medio resuelvo…*, de Mel Silberman.

Para desarrollar esta tarea, los alumnos utilizarán GeoGebra para presentar la construcción de un arco parabólico en la puerta de museo. Para ello, se agruparán por parejas explicándose mutuamente qué saben del contenido necesario para resolver el problema y cómo pueden hacerlo. Anotarán sus ideas para compartirlas.

Soluciones de las actividades

Muchas de las formas de nuestro entorno se pueden expresar y representar por medio de funciones matemáticas.

Comprende

1 Observa esta fachada.

a) ¿Qué tipo de función tiene como representación gráfica una curva como la que puedes ver sobre la puerta?

b) ¿Qué datos necesitarías para representar dicha curva en un dibujo a escala sobre unos ejes de coordenadas?

a) Es una función cuadrática.

b) La altura de la puerta y el ancho de la parte más baja.

Relaciona

2 Utiliza el programa GeoGebra para representar gráficamente la función:

$$y = -0{,}55x^2 + 2{,}75$$

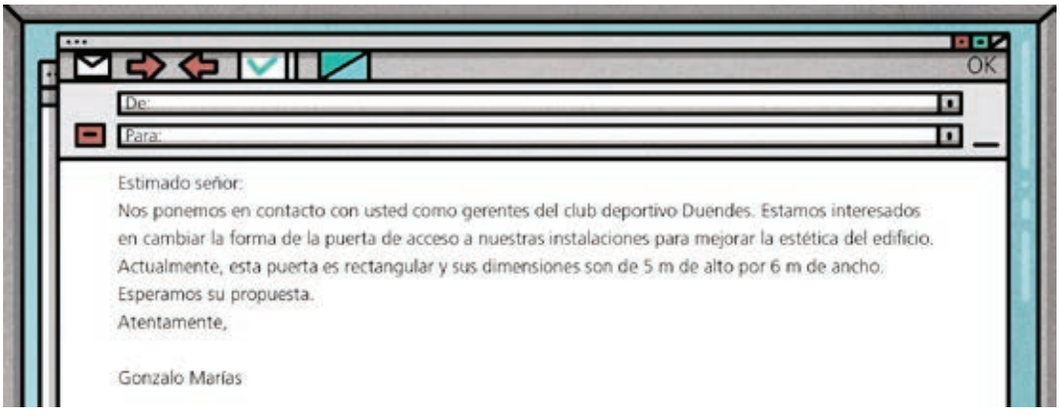
¿Qué ventajas crees que añaden las representaciones gráficas de funciones a la hora de presentar la información sobre un tema determinado?

La representación con GeoGebra se obtiene introduciendo en la línea de entrada su ecuación.

Las representaciones gráficas proporcionan claridad y facilidad de interpretación.

Reflexiona

3 Lee la información en este correo electrónico enviado a un arquitecto.



Ponte en el lugar del arquitecto y plantea una propuesta al club deportivo para realizar una puerta con forma parabólica siguiendo las indicaciones.

a) Obtén la expresión algebraica de la función cuadrática correspondiente a la parábola. Simplifica los cálculos utilizando el eje de ordenadas como eje de simetría.

b) Calcula las coordenadas del vértice de la parábola.

c) Calcula los puntos de corte de la función con los ejes de coordenadas.

d) Elabora una tabla que incluya 10 valores para hallar puntos de la parábola con abscisas entre las de los dos puntos de corte con el eje de abscisas.

e) Representa gráficamente la parábola del arco de la puerta. La escala debe ser 1 u:1 m.

a) Las funciones que pasan por los puntos (−3, 0) y (3, 0) son de la forma: $f(x) = a\,(x + 3)(x - 3) = ax^2 - 9a$

Para hallar el valor de a utilizamos que $f(0) = 5$: $5 = -9a \rightarrow a = -\frac{5}{9}$

Por tanto, la expresión de la función es: $f(x) = -\frac{5}{9}(x + 3)(x - 3) = -\frac{5}{9}x^2 + 5$

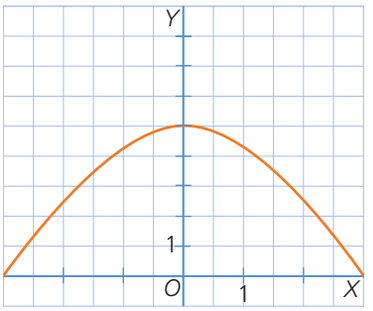
b) $V(0, 5)$

c) (−3, 0) y (3, 0)

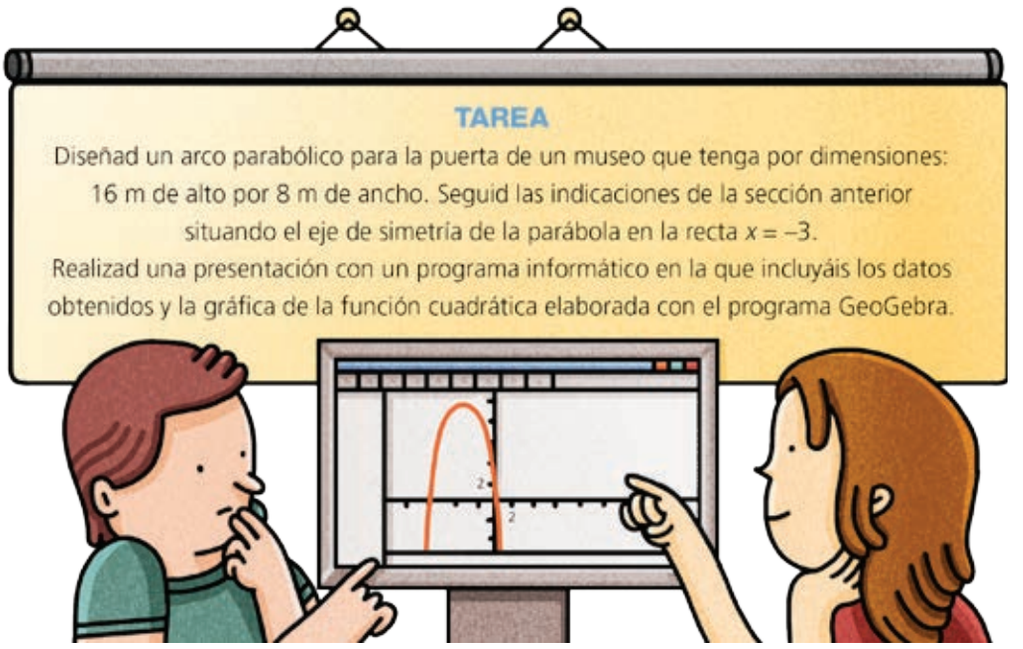
d)

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	0	1,53	2,78	3,75	4,44	4,86	5	4,86	4,44	3,75	2,78	1,53	0

e)



Trabajo cooperativo



La función pasa por (−7, 0) y (1, 0), que son los puntos de corte con el eje de abscisas.

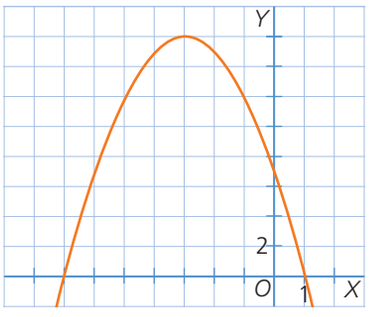
Su expresión es: $f(x) = a(x + 7)(x - 1) = f(x) = ax^2 + 6ax - 7a$

Para hallar el valor de a como sabemos que $f(-3) = 16$:

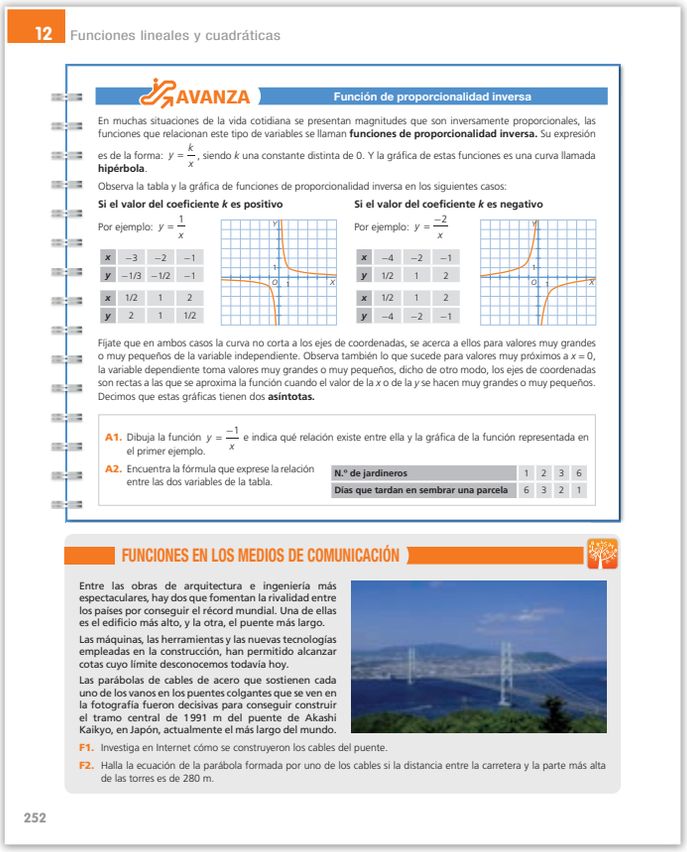
$16 = 9a - 18a - 7a \rightarrow 16 = -16a \rightarrow a = -1$

Por tanto, la función es $f(x) = -x^2 - 6x + 7$, y su gráfica:

x	1	0	−1	−2	−2,50	−3	−3,50	−4	−5	−6	−7
$f(x)$	0	7	12	15	15,75	16	15,75	15	12	7	0



Avanza. Función de proporcionalidad inversa



12 Funciones lineales y cuadráticas

AVANZA — Función de proporcionalidad inversa

En muchas situaciones de la vida cotidiana se presentan magnitudes que son inversamente proporcionales, las funciones que relacionan este tipo de variables se llaman **funciones de proporcionalidad inversa.** Su expresión es de la forma: $y = \frac{k}{x}$, siendo k una constante distinta de 0. Y la gráfica de estas funciones es una curva llamada **hipérbola**.

Observa la tabla y la gráfica de funciones de proporcionalidad inversa en los siguientes casos:

Si el valor del coeficiente *k* es positivo

Por ejemplo: $y = \frac{1}{x}$

x	−3	−2	−1
y	−1/3	−1/2	−1

x	1/2	1	2
y	2	1	1/2

Si el valor del coeficiente *k* es negativo

Por ejemplo: $y = \frac{-2}{x}$

x	−4	−2	−1
y	1/2	1	2

x	1/2	1	2
y	−4	−2	−1

Fíjate que en ambos casos la curva no corta a los ejes de coordenadas, se acerca a ellos para valores muy grandes o muy pequeños de la variable independiente. Observa también lo que sucede para valores muy próximos a $x = 0$, la variable dependiente toma valores muy grandes o muy pequeños, dicho de otro modo, los ejes de coordenadas son rectas a las que se aproxima la función cuando el valor de la x o de la y se hacen muy grandes o muy pequeños. Decimos que estas gráficas tienen dos **asíntotas.**

A1. Dibuja la función $y = \frac{-1}{x}$ e indica qué relación existe entre ella y la gráfica de la función representada en el primer ejemplo.

A2. Encuentra la fórmula que exprese la relación entre las dos variables de la tabla.

N.º de jardineros	1	2	3	6
Días que tardan en sembrar una parcela	6	3	2	1

FUNCIONES EN LOS MEDIOS DE COMUNICACIÓN

Entre las obras de arquitectura e ingeniería más espectaculares, hay dos que fomentan la rivalidad entre los países por conseguir el récord mundial. Una de ellas es el edificio más alto, y la otra, el puente más largo.

Las máquinas, las herramientas y las nuevas tecnologías empleadas en la construcción, han permitido alcanzar cotas cuyo límite desconocemos todavía hoy.

Las parábolas de cables de acero que sostienen cada uno de los vanos en los puentes colgantes que se ven en la fotografía fueron decisivas para conseguir construir el tramo central de 1991 m del puente de Akashi Kaikyo, en Japón, actualmente el más largo del mundo.

F1. Investiga en Internet cómo se construyeron los cables del puente.

F2. Halla la ecuación de la parábola formada por uno de los cables si la distancia entre la carretera y la parte más alta de las torres es de 280 m.

252

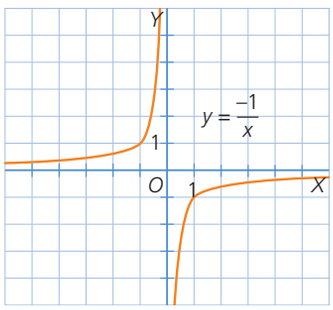
Sugerencias didácticas

En la sección Avanza de esta unidad se introduce la función de proporcionalidad inversa. Su aplicación y estudio comparándolas con las funciones de proporcionalidad directa se trabajará con mayor profundidad en cursos superiores.

Soluciones de las actividades

A1. Dibuja la función $y = \frac{-1}{x}$ e indica qué relación existe entre ella y la gráfica de la función representada en el primer ejemplo.

x	−3	−2	−1	−1/2	1/2	1	2	3
y	1/3	1/2	1	2	−2	−1	−1/2	−1/3



Las funciones $y = \frac{1}{x}$ y $y = \frac{-1}{x}$ son simétricas respecto al eje de abcisas.

A2. Encuentra la fórmula que exprese la relación entre las dos variables de la tabla.

N.º de jardineros	1	2	3	6
Días que tardan en sembrar una parcela	6	3	2	1

Las dos magnitudes son inversamente proporcionales:

$$y = \frac{6}{x}$$

Funciones en los medios de comunicación

Sugerencias didácticas

Esta sección, cierre de la unidad, podemos plantearla como un concurso a nivel internacional para alumnos de 3.º de ESO.

Les presentamos una situación científica que implica la comprensión de un proceso tecnológico y la resolución de un problema matemático. Cada alumno presentará un informe que debe incluir dos partes, la primera será la investigación, utilizando las nuevas tecnologías, de cómo se construyeron los cables del puente Akashi Kaikyo.

Soluciones de las actividades

F1. Investiga en Internet cómo se construyeron los cables del puente.

Los dos cables principales se construyeron con 37 000 hebras de alambre y ocupan más de un metro de ancho.

La longitud de los cables de sujeción es de 300 000 km.

F2. Halla la ecuación de la parábola formada por uno de los cables si la distancia entre la carretera y la parte más alta de las torres es de 280 m.

Es una parábola abierta hacia arriba. Colocando el vértice en el origen de coordenadas (0, 0) la parábola alcanza los puntos (−995,5; 280) y (995,5; 280) y es de la forma $f(x) = ax^2$.

Por tanto: $280 = a \cdot (995{,}5)^2 \rightarrow a = \frac{280}{991\,020{,}25} = 2{,}825 \cdot 10^{-4} \rightarrow f(x) = \left(2{,}825 \cdot 10^{-4}\right) x^2$

PROPUESTA DE EVALUACIÓN
PRUEBA A

1. Clasifica cada función en lineal, de proporcionalidad directa o constante y estudia si la recta pasa por el punto $A(2, -3)$.

a) $y = x - 3$ **b)** $y = -3$ **c)** $y = 3x - 9$ **d)** $y = 5x$

a) Lineal y no pasa por A.

b) Constante y pasa por A.

c) Lineal y pasa por A.

d) De proporcionalidad directa y no pasa por A.

2. Decide si las siguientes funciones lineales son crecientes o decrecientes, y halla el punto de corte de cada una con el eje Y.

a) $y = 3x - 5$ **c)** $y = -5x + 5$

b) $y = -x - 5$ **d)** $y = 5x - 3$

a) Creciente, corta en $(0, -5)$.

b) Decreciente, corta en $(0, -5)$.

c) Decreciente, corta en $(0, 5)$.

d) Creciente, corta en $(0, -3)$.

3. Halla la ecuación de la recta:

a) Paralela al eje X y que pasa por $A(2, 5)$.

b) Paralela al eje Y y que pasa por $A(2, 5)$.

a) $y = 5$

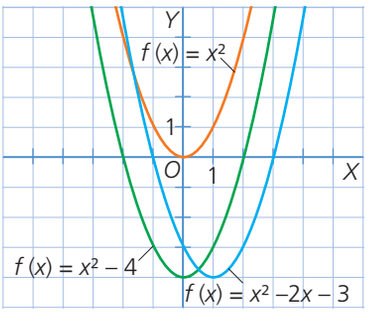
b) $x = 2$

4. Obtén la ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos $A(4, 2)$ $B(5, 3)$.

$y = x - 2$

5. Dibuja en los mismos ejes las siguientes funciones cuadráticas.

a) $f(x) = x^2$ **b)** $f(x) = x^2 - 4$ **c)** $f(x) = x^2 - 2x - 3$



PROPUESTA DE EVALUACIÓN
PRUEBA B

1. Halla la ecuación explícita de la recta en los siguientes casos.

a) Pasa por $A(4, 2)$ y tiene por pendiente $m = 3$.

b) Es paralela a la recta $y = x + 6$ y pasa por el punto $B(1, -2)$.

c) Su ordenada en el origen es $n = -2$ y es paralela a la recta $y = -x + 4$.

d) Pasa por los puntos $A(1, -2)$ y $B(5, 3)$.

a) $y = 3x - 10$

b) $y = x - 3$

c) $y = -x - 2$

d) $y = \frac{5}{4}x - \frac{13}{4}$

2. La expresión $2x - y + 8 = 0$ es la ecuación en forma general de una recta.

a) Escribe su expresión explícita.

b) Halla la pendiente.

c) Expresa la recta en forma punto pendiente.

d) Halla el punto de corte con la recta de ecuación $2x - y + 1 = 0$.

a) $y = 2x + 8$

b) $m = 2$

c) $y - 0 = 2(x + 4)$

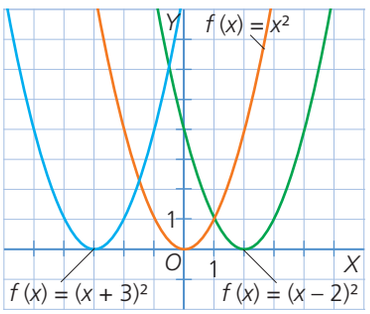
d) Son rectas paralelas, no existe punto de corte.

3. Dibuja en los mismos ejes las siguientes funciones cuadráticas.

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = (x - 2)^2$

c) $f(x) = (x + 3)^2$



4. Escribe la ecuación de parábola sabiendo que corta al eje X en los puntos $x = 1$ y $x = 5$ y la ordenada del vértice es $y = -2$.

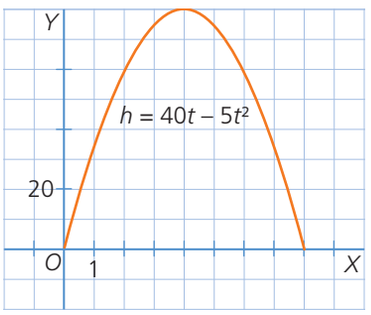
$f(x) = \frac{1}{2}(x - 1)(x - 5) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$

5. Una de las siguientes ecuaciones, que se corresponde con la gráfica, expresa la relación entre la altura, h, alcanzada por un balón que se lanza hacia arriba, y el tiempo, t. ¿Cuál de ellas es?

a) $h = 6t - t^2$

b) $h = 5t - t^2$

c) $h = 40t - 5t^2$

d) $h = -4t^2 - 60t$

El apartado **c)**.