

EXAMEN DE DERIVADAS.
(1º DE BACHILLERATO DE CIENCIAS)

1. Definición de derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica. (1,5 puntos)

2. Halla el valor que debe tener a para que sea continua la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x < 1 \\ 3x - a & x \geq 1 \end{cases}$.

Justifica tu resultado haciendo una representación gráfica de $f(x)$. (1,5 puntos)

¿La función obtenida será derivable en $x = 1$? Justifícalo. (0,5 puntos)

3. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 5x(4x^2 - 2)^3$ b) $f(x) = \frac{3x-2}{x^2-2x}$ c) $f(x) = \sqrt{x^4 + 2x^2}$

d) $y = \ln(x^2 + 5x)$ e) $y = (\sin(2 - 2x^3))^2$ f) $y = e^{x^2+3}$

g) $f(x) = 5x \cdot \ln(1+x)$ h) $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ (2,5 puntos)

¿Alguna de las funciones anteriores es derivable en $x = 0$? Indica por qué lo son o por qué no. (0,5 puntos)

4. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^2 - 3x + 1$ en el punto $x = 2$. Representa gráficamente (dando valores) la curva y la tangente. (2 puntos)

(Para la parábola, determina mediante derivadas su vértice y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento).

5. Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los máximos y mínimos de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Esboza su gráfica. (1,5 puntos)

SOLUCIONES

1. Definición de derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica. (1,5 puntos)
→ Ver libro de texto.

2. Halla el valor que debe tener a para que sea continua la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x < 1 \\ 3x - a & x \geq 1 \end{cases}$.

Justifica tu resultado haciendo una representación gráfica de $f(x)$. (1,5 puntos)

¿La función obtenida será derivable en $x = 1$? (0,5 puntos)

Solución:

• El único punto dudoso es $x = 1$.

Por la izquierda:

$$\text{Si } x \rightarrow 1^-, f(x) = x^2 + x \rightarrow 2$$

Por la derecha:

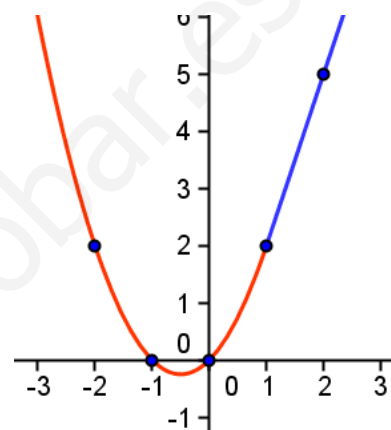
$$\text{Si } x \rightarrow 1^+, f(x) = 3x - a \rightarrow 3 - a.$$

Deben ser iguales: $2 = 3 - a \Rightarrow a = 1$.

La función continua será: $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x < 1 \\ 3x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$

Dando algunos valores se puede trazar su gráfica:

$(-2, 2); (-1, 0); (0, 0); (1, 2); (2, 5)$



Derivada. Salvo en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x < 1 \\ 3 & x > 1 \end{cases}$$

Como $f'(1^-) = 3 = f'(1^+)$, la función obtenida es derivable en $x = 1$.

3. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 5x(4x^2 - 2)^3$ b) $f(x) = \frac{3x - 2}{x^2 - 2x}$ c) $f(x) = \sqrt{x^4 + 2x^2}$

d) $y = \ln(x^2 + 5x)$ e) $y = (\text{sen}(2 - 2x^3))^2$ f) $y = e^{x^2+3}$

g) $f(x) = 5x \cdot \ln(1 + x)$ h) $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ (2,5 puntos)

¿Alguna de las funciones anteriores es derivable en $x = 0$? Indica por qué lo son o por qué no. (0,5 puntos)

Solución:

a) $f'(x) = 5(4x^2 - 2)^3 + 5x \cdot 3(4x^2 - 2)^2 \cdot 8x = 5(4x^2 - 2)^3 + 120x^2(4x^2 - 2)^2$

b) $f'(x) = \frac{3(x^2 - 2x) - (3x - 2)(2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2} = \frac{-3x^2 + 4x - 4}{(x^2 - 2x)^2}$

c) $f'(x) = \frac{4x^3 + 4x}{2\sqrt{x^4 + 2x^2}} = \frac{2(x^3 + x)}{\sqrt{x^4 + 2x^2}}$

d) $y' = \frac{2x + 5}{x^2 + 5x}$

e) $y' = 3(\text{sen}(2 - 2x^3))(\cos(2 - 2x^3))(-6x^2) = -12x^2(\text{sen}(2 - 2x^3))(\cos(2 - 2x^3))$

f) $y' = 2xe^{x^2+3}$

$$g) f'(x) = 5 \ln(1+x) + \frac{5x}{1+x}$$

$$h) f'(x) = -\sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

→ Las funciones b), d) y h) no están definidas en $x = 0$; por tanto no pueden ser derivables.

La función definida en c) no es derivable en $x = 0$, pues $f'(0)$ no existe.

Las restantes funciones sí son derivables en $x = 0$.

4. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^2 - 3x + 1$ en el punto $x = 2$. Representa gráficamente (dando valores) la curva y la tangente. (2 puntos)

(Para la parábola, determina mediante derivadas su vértice y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento).

Solución:

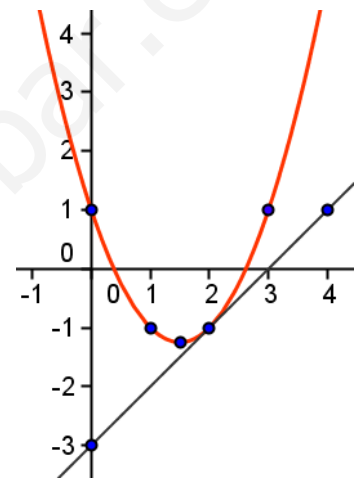
$$\bullet f(x) = x^2 - 3x + 1 \rightarrow f(2) = -1; \quad f'(x) = 2x - 3 \rightarrow f'(2) = 1$$

El punto de tangencia es $(2, -1)$.

$$\text{Tangente: } y - (-1) = 1 \cdot (x - 2) \Rightarrow y = x - 3$$

Algunos puntos de la parábola: $(0, 1)$; $(1, -1)$; $(2, -1)$; $(3, 1)$.

$$\text{Vértice: } f'(x) = 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = -\frac{5}{4} \rightarrow V = \left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right)$$



5. Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los máximos y mínimos de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Esboza su gráfica. (1,5 puntos)

Solución:

$$\bullet f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \text{ si } x = 0 \text{ o } x = 2.$$

Si $x < 0$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ creciente.

Si $0 < x < 2$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decreciente.

Si $x > 2$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ creciente.

En $x = 0$ se tiene un máximo: $f(0) = 1$.

En $x = 2$ se tiene un mínimo: $f(2) = -3$.

Otros valores: $(-1, -3)$; $(3, 1)$.

