1. Calcula la derivada de la función $f(x)=x^2-3x$ aplicando la definición. Escribe la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa x = -1. (2 puntos)

2. Calcula las derivadas de las siguientes funciones: (3 puntos)

a) $y=\ln\left[\dfrac{x^2-2}{x^2+2}\right]$

b) $y=e^{1-5x}\,\mathrm{sen}\,x$

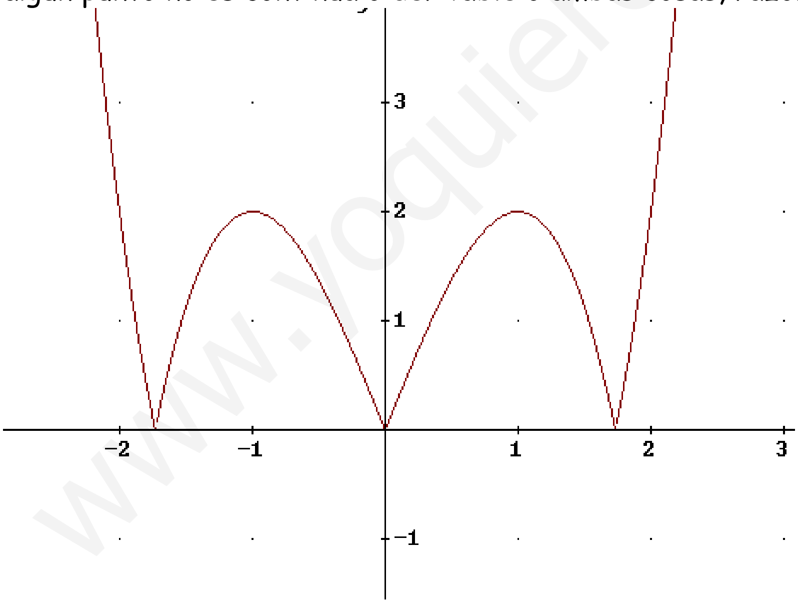
c) $y=\dfrac{\cos^2 x}{\mathrm{sen}\,x}$

d) $y=\mathrm{arctg}\sqrt{2x-3}$

3. Halla el valor de a para que la siguiente función sea continua en R. ¿Es f derivable para ese valor de a? Razona la respuesta. (2 puntos)

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x-1 & \text{si } x<3 \\ \sqrt{x+a} & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$$

4. Decide si la siguiente función es continua y derivable en todo su dominio. Si en algún punto no es continua o derivable o ambas cosas, razónalo. (1 punto)



5.- Estudia el crecimiento de la función $y=x^3-3x^2+4$. Halla razonadamente sus máximos y/o mínimos. (2 puntos)

www.yoquieroaprobar.es

SOLUCIONES

1. $f(x)=x^2-3x$, sabemos que $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$f(x+h)-f(x)=(x+h)^2-3(x+h)-(x^2-3x)=x^2+h^2+2xh-3x-3h-x^2+3x$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2xh-3h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(h+2x-3)}{h}=2x-3$$

recta tangente en el punto de abscisa x = -1:

$$y-f(-1)=f'(-1)(x+1)\to \quad f(-1)=(-1)^2-3(-1)=4;\ f'(-1)=2(-1)-3=-5$$

$$y-4=-5(x+1)\to y=-5x-5+4\to y=-5x-1$$

2. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=\ln\left[\dfrac{x^2-2}{x^2+2}\right] \quad \to y'=\dfrac{x^2+2}{x^2-2}\cdot\dfrac{2x(x^2+2)-(x^2-2)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}$

$$y'=\frac{x^2+2}{x^2-2}\cdot\frac{2x^3+4x-2x^3+4x}{(x^2+2)^2}=\frac{x^2+2}{x^2-2}\cdot\frac{8x}{(x^2+2)^2}=\frac{8x}{x^4-4}$$

b) $y=e^{1-5x}\,\mathrm{sen}\,x\to y'=e^{1-5x}(-5)\cdot\mathrm{sen}\,x+e^{1-5x}\cos x=e^{1-5x}(\cos x-5\,\mathrm{sen}\,x)$

c) $y=\dfrac{\cos^2 x}{\mathrm{sen}\,x}\to y'=\dfrac{2\cos x(-\mathrm{sen}\,x)\cdot\mathrm{sen}\,x-\cos^2 x\cdot\cos x}{\mathrm{sen}^2 x}$

$$y'=\frac{-2\cos x\cdot\mathrm{sen}^2 x-\cos^3 x}{\mathrm{sen}^2 x}=\frac{-\cos x\left(2\,\mathrm{sen}^2 x+\cos^2 x\right)}{\mathrm{sen}^2 x}$$

d) $y=\mathrm{arctg}\sqrt{2x-3}\to y'=\dfrac{1}{1+\left(\sqrt{2x-3}\right)^2}\cdot\dfrac{2}{2\sqrt{2x-3}}=\dfrac{1}{(2x-2)\sqrt{2x-3}}$

3. Halla el valor de a para que la siguiente función sea continua en R. ¿Es f derivable para ese valor de a? Razona la respuesta.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x-1 & \mathrm{si}\ x<3\to \text{función cuadrática, continua}\\ \sqrt{x+a} & \mathrm{si}\ x\ge 3\to \text{función raiz cuadrada, continua si } x+a\ge 0\end{cases}$$

Tiene que ser continua en x=3

$$\begin{cases} f(3)=\sqrt{3+a}\\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(x^2-2x-1)=2\to\sqrt{3+a}=2\to 3+a=4\to a=1\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\sqrt{x+a}=\sqrt{3+a}\end{cases}$$

Para a = 1, la función es continua en R. $f(x)=\begin{cases} x^2-2x-1 & \mathrm{si}\ x<3\\ \sqrt{x+1} & \mathrm{si}\ x\ge 3\end{cases}$

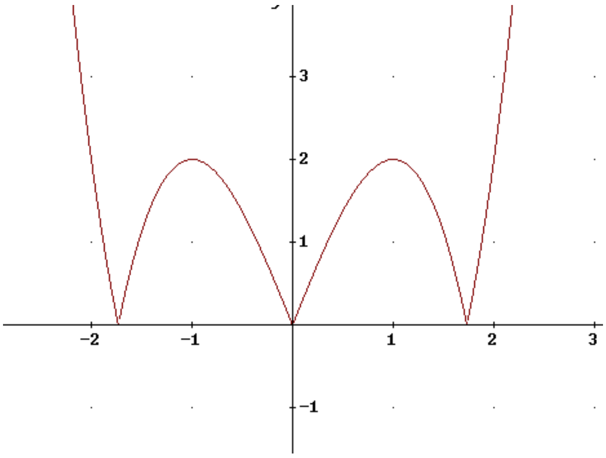
Derivabilidad: Cada trozo es derivable , aunque $\sqrt{x+1}$ no lo sería en x = -1, pero no está definida en ese punto. Queda ver, por tanto, si es derivable en x = 3

www.yoquieroaprobar.es

$$f'(x)=\begin{cases}2x-2 & \text{si } x<3\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} & \text{si } x>3\end{cases} \rightarrow \begin{cases}f'(3^-)=2\cdot 3-2=4\\ f'(3^+)=\dfrac{1}{2\sqrt{4}}=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$ no derivable en x=3

La función es continua en R y derivable en $R-\{3\}$

4. Decide si la siguiente función es continua y derivable en todo su dominio. Si en algún punto no es continua o derivable o ambas cosas, razónalo.



Dominio R

Continua en R

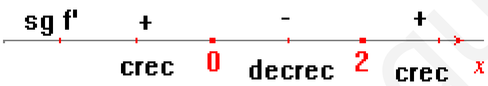
Derivabilidad: esta función no es derivable en tres puntos:

x = 0; x = -1,8 ; x = 1,8 (aprox)

En esos tres puntos las pendientes de las rectas tangentes por la derecha y por la izquierda son diferentes, es decir, las derivadas laterales en cada uno de esos puntos no coinciden.

5.- Estudia el crecimiento de la función $y=x^3-3x^2+4$

$$y'=3x^2-6x=0\rightarrow x(3x-6)=0\rightarrow \begin{cases}x=0\\ 3x-6=0\rightarrow x=2\end{cases}$$



Creciente en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

Decreciente en $(0,2)$

Máximo en x = 0 $\rightarrow y=0^3-3\cdot 0+4=4\rightarrow$ MÁXIMO (0,4)

Mínimo en x = 2 $\rightarrow y=2^3-3\cdot 2^2+4=8-12+4=0\rightarrow$ MÍNIMO (2,0)

www.yoquieroaprobar.es