1) Representa gráficamente la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x+1} & \text{si } x<0\\ x^2-2 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$ sin hacer tabla de valores, halla su dominio y recorrido y estudia su continuidad. (1,5 puntos)

2) Calcula las siguientes derivadas: (2 puntos)

a) $y=\cos x\cdot 3^{x^3+1}$ b) $y=\ln\sqrt{x^2-1}$ c) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$

3) Haz un estudio lo más completo posible de las funciones siguientes y represéntalas gráficamente. (3,5 puntos)

a) $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x}$ b) $g(x)=x^3-2x^2$

4) Halla los puntos de la curva $y=x^3-2x$ en los que la tangente tiene pendiente 1. Halla la ecuación de esas rectas tangentes. (1,5 puntos)

5) Determina a para que la siguiente función sea continua en x = 1.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1} & \text{si } x\neq 1\\ a & \text{si } x=1\end{cases}$$

Para ese valor de a ¿es f continua en R? (1,5 puntos)

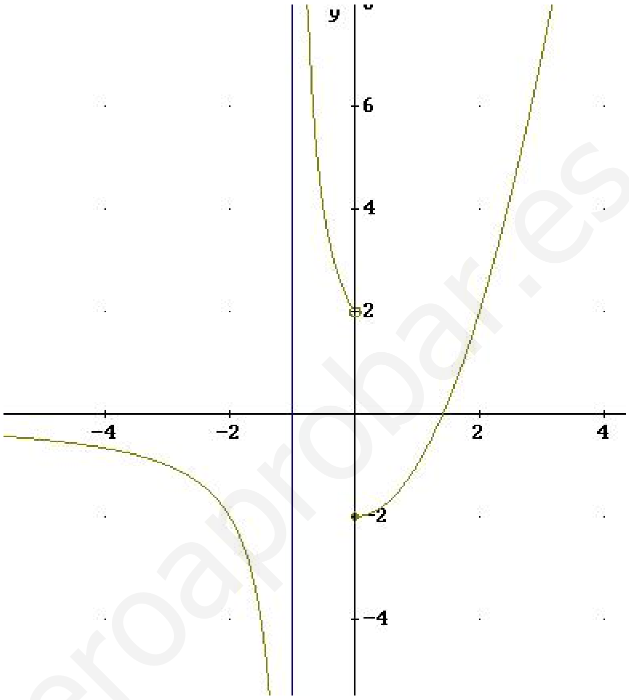
SOLUCIONES

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x+1} & \text{si } x<0 \rightarrow \text{hipérbola con AV } x=-1 \text{ y AH } y=0\\ x^2-2 & \text{si } x\geq 0 \rightarrow \text{parábola con vértice en } (0,-2) \text{y corta eje x en } \sqrt{2}\end{cases}$

$Dom = R-\{1\}$

$Rec\ = R$

Discontinua en x = -1 y en x =0
En x = -1 tiene una discontinuidad de salto infinito (asíntota vertical de ramas divergentes)
En x = 0 tiene una discontinuidad de salto finito.



2. a) $y=\cos x\cdot 3^{x^3+1} \rightarrow y'=-\operatorname{sen} x\cdot 3^{x^3+1}+\cos x\cdot 3^{x^3+1}\ln 3\cdot 3x^2$

$y'=(3x^2\ln 3\cos x-\operatorname{sen} x)3^{x^3+1}$

b) $y=\ln\sqrt{x^2-1} \rightarrow y'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x=\dfrac{x}{x^2-1}$

c) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2} \rightarrow y'=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2+2\cdot\dfrac{x^2}{4}}=\dfrac{1}{2+\dfrac{x^2}{2}}=\dfrac{2}{4+x^2}$

3. a) $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x}$ $\qquad$ $Dom\ = R-\{0\}$

Asíntotas:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2}{x}=\frac{-2}{0}\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-2}{x}=\frac{-2}{0^+}=-\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-2}{x}=\frac{-2}{0^-}=+\infty\end{cases}$$

Vertical x = 0

Oblicua $y=mx+n \rightarrow y=x$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2}{x^2}=1;\ n=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-2}{x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-2}{x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2}{x}\right)=0$$

Puntos de corte con los ejes:

Eje x: $\frac{x^2-2}{x}=0 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$; Eje y: No corta

Puntos singulares:

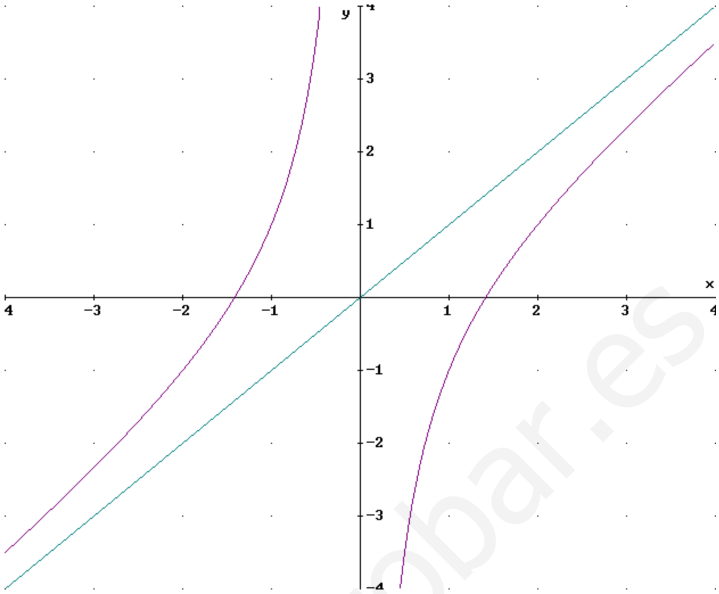
$$y'=\frac{2x^2-(x^2-2)}{x^2}$$

$$y'=\frac{x^2+2}{x^2}=0$$

$$x^2+2=0$$

No tiene

Gráfica $\rightarrow$



b) $g(x)=x^3-2x^2$ Función polinómica, no tiene asíntotas

Ramas infinitas: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-2x^2=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3-2x^2=-\infty$

Corte con los ejes: $x^3-2x^2=0$

$$x(x-2)=0 \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array} \right.$$

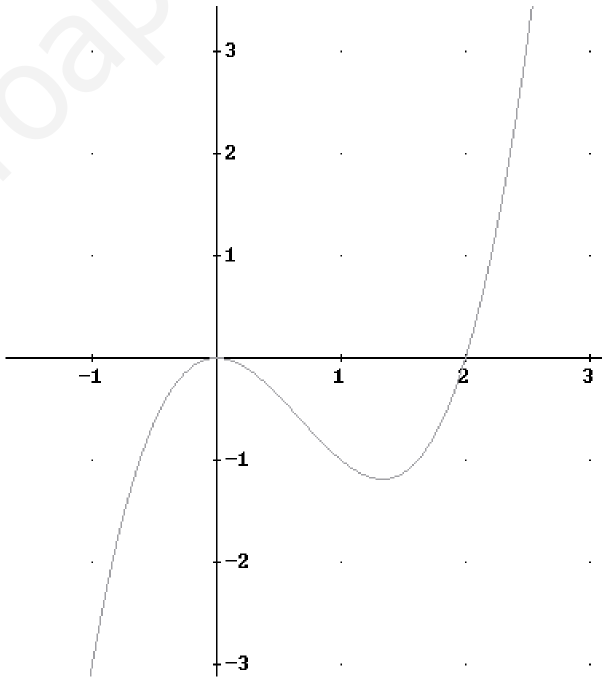
Corta en (0,0) y (2,0)

Puntos singulares: $g'(x)=3x^2-4x=0$

$$x(3x-4)=0 \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{4}{3} \end{array} \right.$$

Máximo (0,0)

Mínimo $\left(\frac{4}{3},-\frac{32}{27}\right)$



4. $y=x^3-2x \rightarrow y'=3x^2-2=1 \Rightarrow 3x^2=3 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm1$

$f(1)=-1$ y $f(-1)=1$

Recta tangente en $x=1$: $y=1(x-1)-1 \rightarrow y=x-2$

Recta tangente en $x=-1$: $y=1(x+1)+1 \rightarrow y=x+2$

5. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1} & \text{si } x \neq 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} f(1) = a \\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1} = \dfrac{0}{0} \to \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow a = \dfrac{3}{2}$$

La función f es continua salvo en los puntos en que se anula el denominador, es decir $x^2-1=0 \Rightarrow x = \pm 1$

En x = 1 ya hemos visto que es continua

En x = -1 $\rightarrow \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1} = \dfrac{-2}{0} = \infty$, asíntota vertical

F es continua en $R - \{-1\}$, y en ese punto tiene una discontinuidad de salto infinito