

1) Representa gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+1} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ sin hacer tabla de valores, halla su dominio y recorrido y estudia su continuidad. (1,5 puntos)

2) Calcula las siguientes derivadas: (2 puntos)

a) $y = \cos x \cdot 3^{x^3+1}$ b) $y = \ln \sqrt{x^2 - 1}$ c) $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$

3) Haz un estudio lo más completo posible de las funciones siguientes y represéntalas gráficamente. (3,5 puntos)

a) $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x}$ b) $g(x) = x^3 - 2x^2$

4) Halla los puntos de la curva $y = x^3 - 2x$ en los que la tangente tiene pendiente 1. Halla la ecuación de esas rectas tangentes. (1,5 puntos)

5) Determina a para que la siguiente función sea continua en $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Para ese valor de a ¿es f continua en \mathbb{R} ? (1,5 puntos)

SOLUCIONES

$$1. f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+1} & \text{si } x < 0 \rightarrow \text{hipérbola con AV } x = -1 \text{ y AH } y = 0 \\ x^2 - 2 & \text{si } x \geq 0 \rightarrow \text{parábola con vértice en } (0, -2) \text{ y corta eje } x \text{ en } \sqrt{2} \end{cases}$$

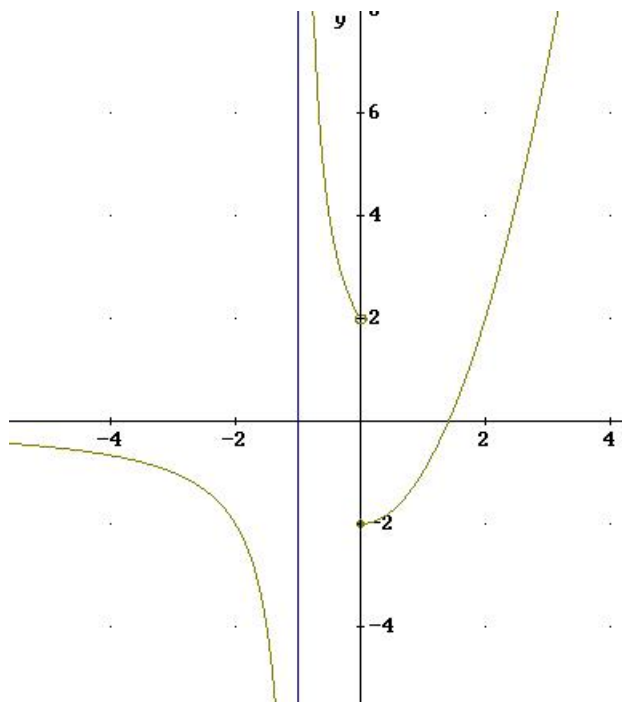
$$\text{Dom} = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$\text{Rec} = \mathbb{R}$$

Discontinua en $x = -1$ y en $x = 0$

En $x = -1$ tiene una discontinuidad de salto infinito (asíntota vertical de ramas divergentes)

En $x = 0$ tiene una discontinuidad de salto finito.



$$2. a) y = \cos x \cdot 3^{x^3+1} \rightarrow y' = -\text{sen } x \cdot 3^{x^3+1} + \cos x \cdot 3^{x^3+1} \ln 3 \cdot 3x^2$$

$$y' = (3x^2 \ln 3 \cos x - \text{sen } x) 3^{x^3+1}$$

$$b) y = \ln \sqrt{x^2 - 1} \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} \cdot 2x = \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$c) y = \text{arctg} \frac{x}{2} \rightarrow y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2 + 2 \cdot \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2 + \frac{x^2}{2}} = \frac{2}{4 + x^2}$$

$$3. a) f(x) = \frac{x^2 - 2}{x} \quad \text{Dom} = \mathbb{R} - \{0\}$$

Asíntotas:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2}{x} = \frac{-2}{0} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 2}{x} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 2}{x} = \frac{-2}{0^-} = +\infty \end{cases} \quad \text{Vertical } x = 0$$

Oblicua $y = mx + n \rightarrow y = x$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2}{x^2} = 1; \quad n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2}{x} \right) = 0$$

Puntos de corte con los ejes:

Eje x: $\frac{x^2-2}{x} = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$; Eje y: No corta

Puntos singulares:

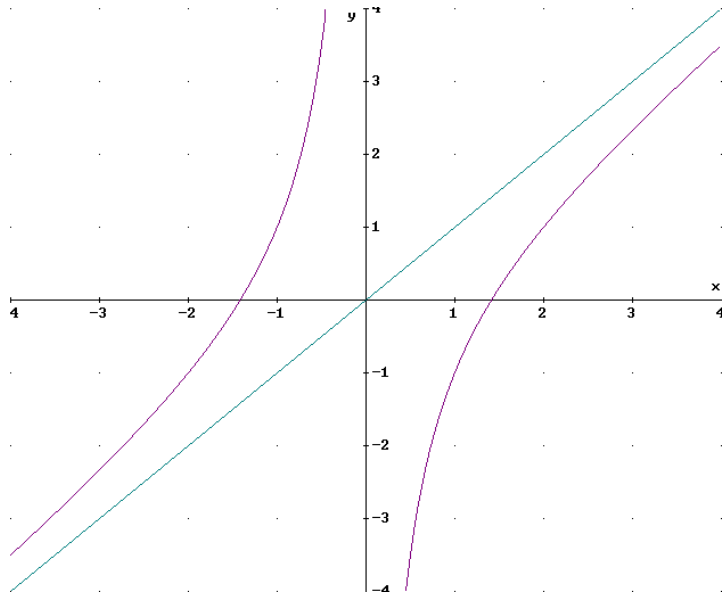
$$y' = \frac{2x^2 - (x^2 - 2)}{x^2}$$

$$y' = \frac{x^2 + 2}{x^2} = 0$$

$$x^2 + 2 = 0$$

No tiene

Gráfica →



b) $g(x) = x^3 - 2x^2$ Función polinómica, no tiene asíntotas

Ramas infinitas: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 2x^2 = +\infty$;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 2x^2 = -\infty$

Corte con los ejes: $x^3 - 2x^2 = 0$

$$x(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

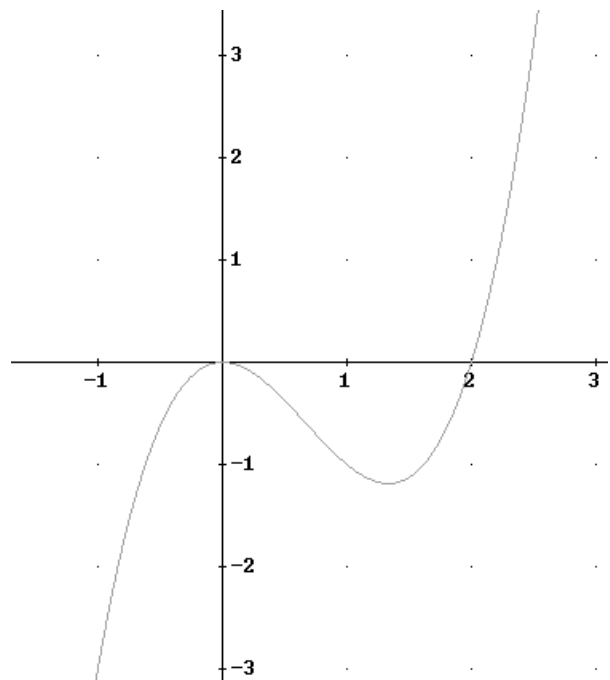
Corta en (0,0) y (2,0)

Puntos singulares: $g'(x) = 3x^2 - 4x = 0$

$$x(3x-4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Máximo (0,0)

Mínimo $\left(\frac{4}{3}, -\frac{32}{27}\right)$



4. $y = x^3 - 2x \rightarrow y' = 3x^2 - 2 = 1 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$f(1) = -1$ y $f(-1) = 1$

Recta tangente en $x = 1$: $y = 1(x-1) - 1 \rightarrow y = x - 2$

Recta tangente en $x = -1$: $y = 1(x+1) + 1 \rightarrow y = x + 2$

$$5. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1) = a \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2} \end{array} \right.$$

La función f es continua salvo en los puntos en que se anula el denominador, es decir $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

En $x = 1$ ya hemos visto que es continua

En $x = -1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \frac{-2}{0} = \infty$, asíntota vertical

f es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$, y en ese punto tiene una discontinuidad de salto infinito