

1.- Halla razonadamente el dominio de las siguientes funciones: (2,5 puntos)

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 9}}$$

$$\text{b) } g(x) = \ln(4 - x^2)$$

$$\text{c) } h(x) = \sqrt{\frac{3+x}{2x-1}}$$

2.- Dadas las funciones: $f(x) = \sqrt{x-2}$ y $g(x) = \frac{2x}{x-1}$

Halla:

a) fog, gof y sus dominios. (1,5 puntos)

b) f^{-1} y g^{-1} y sus dominios (1 punto)

3.- Representa gráficamente y halla el dominio y el recorrido de las funciones:

$$\text{a) } f(x) = |-x^2 + 6x - 5| \quad \text{b) } g(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-1} & \text{si } x \leq 2 \\ x+1 & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad (1,5 \text{ puntos cada una})$$

4.- Dadas las funciones $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ (2 puntos)

a) Escribe las características de cada una de ellas.

b) Representálas gráficamente en el mismo sistema de referencia.

c) ¿Qué relación hay entre ellas?

SOLUCIONES

1.- a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 9}}$ la raíz cúbica no tiene problemas, sólo habrá problemas cuando se

anule el denominador $\rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

b) $g(x) = \ln(4 - x^2)$, la función logarítmica tiene dominio $(0, +\infty)$, luego habrá que resolver la inecuación $4 - x^2 > 0 \Rightarrow (2 - x)(2 + x) > 0$

$$\begin{array}{ccccccc} (4 - x^2) & & & & & & \\ & - & & + & & - & \\ & \cdot & -2 & \cdot & 2 & \cdot & \\ & \cdot & & & & & \end{array} \rightarrow \text{Dom}(g) = (-2, 2)$$

c) $h(x) = \sqrt{\frac{3+x}{2x-1}}$ tiene que cumplirse $\frac{3+x}{2x-1} \geq 0 \rightarrow \begin{cases} 3+x=0 \Rightarrow x=-3 \\ 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \end{cases}$

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{3+x}{2x-1} & & & & & & \\ & + & & - & & + & \\ & \cdot & -3 & \cdot & 1/2 & \cdot & \\ & \cdot & & & & & \end{array}$$

$$\rightarrow \text{Dom}(h) = (-\infty, -3] \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

3.- a) $f(x) = \sqrt{x-2}$ y $g(x) = \frac{2x}{x-1}$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{2x}{x-1}\right) = \sqrt{\frac{2x}{x-1} - 2} = \sqrt{\frac{2}{x-1}} \rightarrow \text{Dom}(f \circ g) = (1, +\infty)$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x-2}) = \frac{2\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}-1} \rightarrow x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$$

$$\sqrt{x-2}-1=0 \Rightarrow \sqrt{x-2}=1 \Rightarrow x-2=1 \Rightarrow x=3 \rightarrow \text{Dom}(g \circ f) = [2, 3) \cup (3, +\infty)$$

b) $f(x) = \sqrt{x-2} \rightarrow y = \sqrt{x-2} \rightarrow x = \sqrt{y-2} \rightarrow x^2 = y-2 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 + 2$

$$\rightarrow \text{Dom}(f^{-1}) = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{2x}{x-1} \rightarrow y = \frac{2x}{x-1} \rightarrow x = \frac{2y}{y-1} \rightarrow xy - x = 2y \rightarrow xy - 2y = x \rightarrow y(x-2) = x$$

$$y = \frac{x}{x-2} \rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x}{x-2} \rightarrow \text{Dom}(g^{-1}) = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$3.- a) f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x - 5 & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 6x + 5 & \text{si } 1 \leq x \leq 5 \\ -x^2 + 6x - 5 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

$y = -x^2 + 6x - 5$ parábola, mira hacia abajo.

$$\text{Vértice} \rightarrow x = -\frac{6}{-2} = 3 \rightarrow V(3, 4)$$

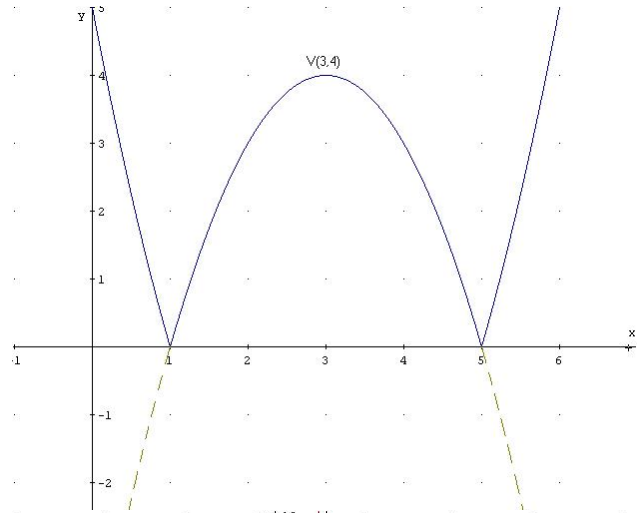
Corte ejes:

Eje OY $\rightarrow (0, -5)$

$$\text{Eje OX} \rightarrow -x^2 + 6x - 5 = 0 \rightarrow x = \left\langle \begin{array}{l} 1 \\ 5 \end{array} \right\rangle$$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Rec}(f) = [0, +\infty)$$

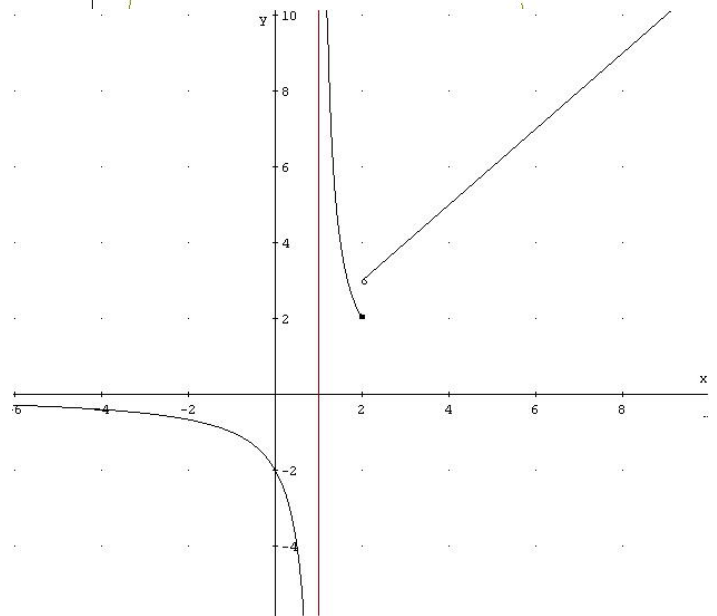


b) $g(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-1} & \text{si } x \leq 2 \\ x+1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ la gráfica

será un trozo de hipérbola, un segmento y una semirrecta, vamos a dibujarla: La hipérbola tiene la asíntota horizontal en el eje OX y la vertical en $x=1$, para dibujar la semirrecta le damos un par de valores.

$$\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\text{Rec}(g) = (-\infty, 0) \cup [2, +\infty)$$



4.- $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$$\text{Dom} = \mathbb{R}, \quad \text{Rec} = (0, +\infty)$$

Pasa por $(0,1)$ y $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

Es decreciente en su dominio
Asíntota horizontal eje OX (dcha)

$$g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$$

$$\text{Dom} = (0, +\infty) \quad \text{Rec} = \mathbb{R}$$

Pasa por $(1,0)$ y $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

Es decreciente en su dominio
Asíntota vertical eje OY

Las gráficas de ambas funciones están hechas en el libro de texto.

Estas funciones son INVERSAS o RECÍPROCAS.